Suites numériques

Laurent Debize

BTS SIO
Mathématiques appliquées à l'informatique

Définition - propriétés

Définition

Une **suite numérique** u définie sur $\mathbb{N}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

$$u : n \mapsto u(n)$$

$u(n)$ est le terme général de la suite u. On le note encore u_n. La suite u est aussi notée (u_n), $n \in \mathbb{N}$.

Définition - propriétés

Exemples

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto 2n+1$ a pour terme général
$$u_n = 2n+1$$
Ses premiers termes sont : $u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,...$
C'est la suite des nombres impairs.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n(n+1)}$ a pour premiers termes :
$$v_1 = \frac{3}{2},\ v_2 = 1,\ v_3 = \frac{11}{12},\ \text{etc.}$$
- Soit (w_n) la suite des nombres premiers, c'est-à-dire des nombres entiers qui ont 2 diviseurs entiers distincts (1 et eux mêmes).
$$w_0 = 2,\ w_1 = 3,\ w_2 = 5,\ w_3 = 7,\ w_4 = 11,\ \text{etc.}$$

Définition - propriétés

Remarque

Parmi les suites précédentes certaines peuvent être notées $u_n = f(n)$, et ne sont que des cas particuliers de fonctions numériques définies seulement sur $\mathbb{N}$.

Ces suites sont représentées comme des fonctions dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'abscisse n et d'ordonnée u_n.

Exemples

Pour u et v définies, respectivement, par $u_n = 2n + 1$ et $v_n = \dfrac{n^2 + 2}{n(n+1)}$.

Exercice 1

Déterminer et représenter les 6 premiers termes des suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -\frac{1}{2}n + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Définition - propriétés

Remarque

Une suite numérique u peut aussi être définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$ qui est l'ensemble des indices de la suite. Nous ne traiterons que les suites définies sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{N}^*$.

Suite alternée

Définition

Si pour tout indice n on a : $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ la suite est dite **alternée**.

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ a pour premiers termes :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{3}, \text{etc.}$$

Elle est alternée car :

$$u_n \cdot u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Suite récurrente

Définition

On appelle **suite récurrente** toute suite définie par un ou plusieurs premiers termes et une relation liant des termes successifs de cette suite.

Exemple

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$ est une suite récurrente.

On a successivement :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 6 = 6,$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = 9,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 6 = \frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}, \text{ etc.}$$

Exercice 2

Déterminer et représenter les 6 premiers termes des suites récurrentes u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 5 \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{v_n} \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

1 Définition - propriétés
Suite numérique
Suite alternée
Suite récurrente

2 Variations des suites
- Variations des suites
- Suites monotones
- Suites bornées

3 Suites particulières
Suites arithmétiques
Suites géométriques

4 Limites
Suites convergentes
Suites divergentes

Variations des suites

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto u_n$. On rappelle que :

- u est **croissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} \geq u_n$
- u est **strictement croissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} > u_n$
- u est **décroissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} \leq u_n$
- u est **strictement décroissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} < u_n$
- u est **stationnaire** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} = u_n$

Remarque

L'étude des variations de u revient donc à l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Variations des suites

Exemples

- Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$? On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 - (3n-5) \\ &= 3n + 3 - 3n \\ &= 3 \\ u_{n+1} - u_n > 0 &\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

  Donc (u_n) est strictement croissante.

- Quel est le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$?
  On calcule $v_{n+1} - v_n = -5 < 0$
  Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Exercice 3

Étudier les variations des suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -\frac{1}{2}n + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

Variations des suites

Remarque

Pour les suites à termes **strictement positifs** on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ et}$$

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

L'étude des variations de u revient alors à comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Variations des suites

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ est une suite à termes **strictement positifs**.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\ &= \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+2}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et (u_n) est une suite strictement décroissante.

Exercice 4

a) Étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs par :

$$u_n = \frac{2^n}{n+1}$$

b) Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{n(n+1)}{e^n}$$

est strictement décroissante pour $n > 3$.

Suites monotones

Définition

On dit que la suite u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

On dit que la suite u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples

- Les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_n = 3n - 5 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

  sont des suites strictement monotones.
- La suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n n$ et dont les premiers termes sont :

$$w_0 = 0,\ w_1 = -1,\ w_2 = 2,\ \dots$$

  n'est pas une suite monotone.

Exercice 5

1. Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{8}{3} \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   a) Déterminer les 6 premiers termes.
   b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < 4$. Montrer que u est une suite strictement croissante.

2. Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{8}{3} \text{ si } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   a) Déterminer les 6 premiers termes.
   b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 4$. Montrer que u est une suite strictement décroissante.

Suites bornées

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto u_n$

- On dit que u est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- On dit que u est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
- Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_n = -n + 1$ est une suite décroissante majorée par $M = 1$ et qui n'est pas minorée.
- La suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ est une suite décroissante à termes positifs.
  On a $0 \leq v_n \leq v_0$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 1$.
  La suite (v_n) est une suite majorée et minorée. Elle est donc bornée.

Suites bornées

Remarque

Les réels m et M cherchés, appelés respectivement minorant et majorant de la suite, doivent être indépendants de l'indice n.

Exercice 6

1. Étudier les variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 – 0,8^n$.
2. Montrer que u est majorée par 3, puis que u est bornée.

Suites arithmétiques

Définition

La suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite (u_n).

Exemple

Si vous déposez tous les mois 100€ sur votre compte bancaire, la suite des sommes sur votre compte est une suite arithmétique de raison 100.

Suites arithmétiques

Théorème

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

Suites arithmétiques

Propriétés

Soit (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors (u_n) est stationnaire.

Exercice 7

La suite (u_n) est arithmétique, on sait que $u_3 = 5$, et $u_7 = 17$.

- Calculer son premier terme et sa raison.
- A l'aide d'un tableur, calculer la somme des 100 premiers termes de cette suite.
- Maintenant, calculer $100 \times \dfrac{u_0 + u_{99}}{2}$

Suites arithmétiques

Théorème

La somme des termes d'une suite arithmétique est :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple

La somme des n premiers entiers est : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, calculer u_k.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et on a $u_0 = -11$ et $k = 12$.
2. (u_n) est une suite arithmétique et on a $u_0 = 12$, $u_4 = 20$ et $k = 20$.

Exercice 9

Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{w_n + 1}$.

1. Calculer w_1 et w_2.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{w_n}$.
3. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison.
4. En déduire l'expression de (v_n) puis celle de w_n en fonction de n.

Suites géométriques

Définition

La suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n \cdot q$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite (u_n).

Exemple

Si votre banque rémunère votre compte à 2% d'intérêts composés, la suite des sommes sur votre compte (après placement initial) est une suite géométrique de raison 1,02.

Suites géométriques

Théorème

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

Exercice

La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 100$, et de raison 1,02. Calculer u_{10}, ainsi que la première valeur de n telle que $u_n \geqslant 2u_0$.

Suites géométriques

Propriétés

Soit (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors (u_n) est stationnaire.
- Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

Suites géométriques

Théorème

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $\neq 1$ est :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple

La somme des n premières puissances de 2 est :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, calculer u_k.

1. (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et on a $u_0 = 0,44$ et $k = 7$.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison 0,4 et on a $u_3 = 16$ et $k = 8$.
3. (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ et on a $u_4 = 4,8$, $u_6 = 19,2$ et $k = 9$.

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes :

1. $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{30}$
2. $T = 0,1 + 0,2 + 0,3 + \ldots + 9,9 + 10$

Exercice 12 (Polynésie 2014)

Une société de création de jeux vidéo commercialise un nouveau produit. Avec les bénéfices escomptés, elle souhaite renouveler son parc informatique. Le renouvèlement du parc informatique est échelonné sur 12 trimestres, pour un coût total de 95 500€.

Le service comptable propose le financement suivant :

- pour le 1er trimestre, verser un montant de 6000€ ;
- chaque trimestre, le montant versé augmente de 5 % par rapport à celui du trimestre précédent.

On note u_n le montant, exprimé en euro, versé le n-ième trimestre. On a donc $u_1 = 6000$.

1. Vérifier que $u_2 = 6300$ et calculer u_3.
2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
3. a. Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Calculer le montant versé au dernier trimestre, arrondi à l'euro,
4. On rappelle que, pour une suite géométrique (U_n) de raison q différente de 1 et de premier terme U_1 on a la formule :

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

   Le financement prévu permet-il de renouveler le parc informatique ? Justifier.

Suites convergentes

Approche

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

- Afficher les 10 premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur type Excel.
- Les représenter sur un graphique sur la calculatrice ou un tableur.
- Que peut-on conjecturer ?
- On veut savoir à partir de quel rang u_n est inférieur à 10^{-25}
- Écrire et implémenter l'algorithme qui permet de trouver ce rang.

Suites convergentes

Quand les valeurs d'une suite (u_n) sont de plus en plus proches de 0, on dit que cette suite a pour limite 0. Plus précisément :

Définition

Soient u une suite numérique et 10^{-p} $(p \in \mathbb{N}^\star)$ une puissance négative de 10. On dira que u **admet pour limite 0 quand** n **tend vers** $+\infty$ si l'on peut trouver des indices n pour lesquels $0 < u_n < 10^{-p}$.
On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Suites convergentes

Exemple

Soit u la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^\star$$

Pour obtenir $0 < u_n < 10^{-25}$, il suffit que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-25}$

c'est-à-dire $\sqrt{n} > 10^{25}$.

Il suffit donc de choisir les indices n tels que $n > 10^{50}$

De manière générale, pour que $0 < u_n < 10^{-p}$, il suffit que :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-p}$$

c'est-à-dire $\sqrt{n} > 10^{p}$

soit $n > 10^{2p}$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

1. À partir de quel indice n_0 a-t-on : $0 < u_n < 10^{-30}$? Utilisez la calculatrice, un tableur ou un algorithme.
2. Étant donné un entier $p \in \mathbb{N}*$, pour quels indices n a-t-on : $0 < u_n < 10^{-p}$?
3. Que concluez-vous ?

Suites convergentes

Calculatrice :

Sur votre calculatrice, affichez les premiers termes des suites suivantes :

- $u_n = \dfrac{1}{n}$
- $v_n = \dfrac{1}{n^2}$
- $w_n = \dfrac{1}{n^3}$
- $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Quelle semble-être leur limite ?

Exercice 14

Le prix de vente, exprimé en euro, d'un modèle d'ordinateur au bout de n trimestres écoulés depuis sa mise sur le marché, noté v_n est donné par :

$$v_n = 615e^{-0,3n} + 250$$

- Quel est le prix de vente de ce modèle à sa mise sur le marché ?
- Déterminer le nombre minimal de trimestres écoulés depuis sa mise sur le marché à partir duquel le prix de vente de ce modèle d'ordinateur deviendra inférieur ou égal à 300 €.

Suites divergentes

Définition

Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Remarque

Il existe plusieurs cas :

- Soit la suite u tend vers $+\infty$
- Soit la suite u tend vers $-\infty$
- Soit la suite u n'admet aucune limite finie ou infinie

Intéressons-nous à ces trois cas...

Exercice 15

La capacité c_n en Mo des clefs USB d'un fabricant en fonction du nombre d'années depuis la création de l'entreprise n est donnée par :

$$c_n = 32 \times 2^n$$

- Quelle est la capacité d'une clef USB l'année de la création de l'entreprise ?
- Au bout de combien d'années la capacité des clefs USB sera supérieure à 1000 Mo ?
- Quelle semble être la limite de la suite (c_n) ?