

Ensembles

Laurent Debize



BTS SIO

Mathématiques appliquées à l'informatique

1 Langage ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et parties

Les ensembles en informatique

2 Théorie des ensembles

Définitions

Relations binaires sur un ensemble

Propriétés

Fonctions - applications

Définitions

Image - Image réciproque

Injection - Surjection - Bijection

Langage ensembliste

Définition

On appelle **ensemble**, toute collection d'objets, ceux-ci étant appelés **éléments** de l'ensemble.

Exemples

- L'ensemble des entiers naturels impairs
- L'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers)
- L'ensemble des élèves d'une classe

Langage ensembliste

Notation

Un ensemble est noté entre accolades. Exemple : $E = \{0 ; 1 ; 2\}$

On note $x \in E$ (lire x appartient à E) pour signifier que l'élément x appartient à l'ensemble E .

On note $x \notin E$ (lire x n'appartient pas à E) pour signifier que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E .

Remarques

- Chaque élément ne figure qu'une seule fois et l'ordre dans lequel ces éléments sont écrits n'a pas d'importance.
- On appelle **ensemble vide** et on note \emptyset tout ensemble qui ne contient aucun élément.

Deux façons de définir un ensemble

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et

parties

Les ensembles
en informatique

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications

Définitions

Image - Image
réciproqueInjection -
Surjection -
Bijection

En extension

Définir un ensemble **en extension** signifie donner tous les éléments de cet ensemble.

Exemple : $E = \{0; 2; 4; 5; 12\}$

En compréhension

Définir un ensemble **en compréhension** signifie exprimer les éléments de cet ensemble à l'aide d'une proposition.

Exemple : $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$

Le symbole \mid se lit « tel que »

L'ensemble F se lit « l'ensemble des x dans \mathbb{N} tels que $x \leq 10$ »

En extension, l'ensemble F s'écrit :

$F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Intersection

Définition

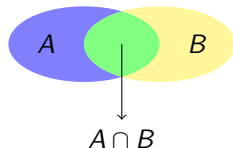
Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E .

L'intersection des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B .

On la note $A \cap B$.

Remarque :

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**



Cette représentation graphique s'appelle un **diagramme de Venn**.

On peut définir $A \cap B$ de la manière suivante (écriture axiomatique) :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A et à B »

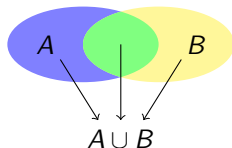
Réunion

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E .

La **réunion** des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B .

On la note $A \cup B$.



Écriture axiomatique :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **ou** à B »

Remarque

Le mot « ou » ici signifie « ou l'un ou l'autre ou les deux » :

$A \cup B$ contient tous les éléments de A et tous les éléments de B .

Exemples

Soient A et B les deux ensembles de nombres suivants :

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \text{ et}$$

$$B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$$

$$A \cap B = \{2; 3; 5; 7\} \text{ (éléments communs à } A \text{ et à } B)$$

$$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 17\}$$

Cet ensemble contient tous les éléments de A et tous les éléments de B (on n'écrit qu'une seule fois le même élément).

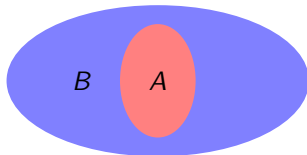
Inclusion

Définition

On dit que l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B pour indiquer que tous les éléments de A appartiennent aussi à B .

On note $A \subset B$.

On a toujours, pour n'importe quel ensemble A : $A \subset A$ et $\emptyset \subset A$



On dit aussi que A est une partie de B ou bien que A est un **sous-ensemble** de B .

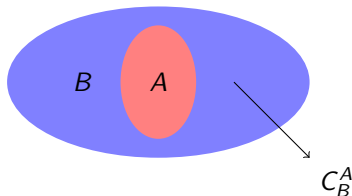
Pour dire que A n'est pas inclus dans B , on emploiera la notation : $A \not\subset B$.

Complémentaire

Définition

Supposons que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B . On appelle le complémentaire de A dans B et on note C_B^A ou \bar{A} l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A . Autrement dit :

$$x \in C_B^A \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \notin A$$



Remarque

On dit que B constitue le référentiel (l'ensemble auquel on se réfère pour prendre le complémentaire).

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Langage
ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et partiesLes ensembles
en informatiqueThéorie des
ensembles

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications
DéfinitionsImage - Image
réciproqueInjection -
Surjection -
Bijection

Définition

On appelle **partie** d'un ensemble E ou **sous-ensemble** de E , tout ensemble inclus dans E . Une partie de E est donc un ensemble constitué avec des éléments de E .

On appelle **cardinal** d'un ensemble et on note : $card(E)$ le nombre de ses éléments.

Exemple

Soit E l'ensemble de lettres suivant :

$$E = \{a, b, c, d\}$$

On a $card(E) = 4$ (E contient 4 éléments)

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Langage
ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et
partiesLes ensembles
en informatiqueThéorie des
ensembles

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications

Définitions

Image - Image
réciproqueInjection -
Surjection -
Bijection

Parties de $E = \{a, b, c, d\}$:

- L'ensemble E lui-même constitue une partie de E : on l'appelle la **partie pleine** de E
- L'ensemble vide \emptyset est une partie de E : on l'appelle la **partie vide** de E
- Une partie ne contenant qu'un seul élément est appelée un **singleton**
Les parties à un élément s'écrivent : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{d\}$: il y en a quatre
- Parties à deux éléments : $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$ $\{b, c\}$ $\{b, d\}$ $\{c, d\}$
- Parties à trois éléments : $\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Langage
ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et
partiesLes ensembles
en informatiqueThéorie des
ensembles

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications

Définitions

Image - Image
réciproqueInjection -
Surjection -
Bijection

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Dans notre cas :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a, b\}; \{a, c\}; \{a, d\}; \{b, c\}; \{b, d\}; \{c, d\}; \\ \{a, b, c\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}; \{a, b, c, d\} \end{array} \right\}$$

Pour déterminer les parties d'un ensemble on peut réaliser un arbre. On constate, sur cet exemple, que E contient 16 éléments. Nous pouvons donc écrire que $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 16$

Propriété

Si n désigne le cardinal de E , alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Exercice 1

Une usine fabrique des pièces de types : Type A et type B. Ces pièces sont soit métalliques, soit en céramique.

On appelle E l'ensemble des pièces qui constitue un stock. On donne : $\text{card}(E) = 10000$. On appelle respectivement : A , B , M , C les ensembles des pièces de type A, de type B, Métalliques, en Céramique.

On note par exemple \bar{A} le complémentaire de A dans E .

40 % des pièces sont en céramique. 30 % des pièces en céramique sont de type A. Dans les pièces de type B, il y a autant de pièces métalliques que de pièces en céramique.

① Compléter :

	Type A	Type B	Total
Métalliques M			
Céramiques C			
Total			10000

- ② Calculer les cardinaux des ensembles suivants : $A \cap M$; $A \cup M$.
- ③ Définir en compréhension les ensembles : $M \cap \bar{B}$ et $\bar{C} \cup A$.
- ④ En définissant les deux ensembles $\overline{B \cap M}$ et $\overline{B} \cup \overline{M}$ en compréhension, montrer qu'ils contiennent les mêmes éléments. Quel est le cardinal de ces ensembles ?

Les ensembles en informatique

Les ensembles en informatique sont **indexés** (numérotés).

Le tableau (array)

Valeur	45	154	58	78	31	5	74
Index	0	1	2	3	4	5	6

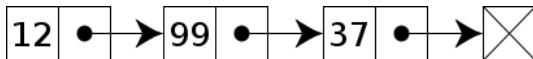
- Accès immédiat à n'importe quel élément du tableau par l'index : $t[i]$ nous donne la valeur de la case numéro i .
- Taille fixe allouée à sa déclaration : impossibilité de supprimer ou rajouter des cases

Les ensembles en informatique

La liste (list)

La liste est définie comme ayant une tête (une valeur), et une queue (un pointeur vers une autre tête).

La tête peut être vide (fin de la liste).



- Pour accéder au n-ième élément de la liste, il faut parcourir n éléments à partir du début de la liste.
- La taille de la liste peut être modifiée en insérant un élément à n'importe quel endroit de la liste.

Les ensembles en informatique

Langage
ensembliste

Définitions
Intersection
Réunion
Inclusion
Complémentaire
Cardinal et
parties

**Les ensembles
en informatique**

Théorie des
ensembles

Définitions
Relations
binaires sur un
ensemble
Propriétés
Fonctions -
applications
Définitions
Image - Image
réciproque
Injection -
Surjection -
Bijection

La file ou FIFO (First In, First Out)

Comparable à la file d'attente, la file est une liste où le premier élément inséré est également le premier retiré.

La pile ou LIFO (Last In, First Out)

Comparable à la pile d'assiettes, la pile est une liste où le dernier élément inséré est le premier retiré.

1 Langage ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et parties

Les ensembles en informatique

2 Théorie des ensembles

Définitions

Relations binaires sur un ensemble

Propriétés

Fonctions - applications

Définitions

Image - Image réciproque

Injection - Surjection - Bijection

Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient deux ensembles A et B . On appelle produit cartésien de A et B , et l'on note $A \times B$ (lire « A croix B), l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, soit encore :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$,
alors $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Produit cartésien de deux ensembles

Remarques

- Les éléments de $A \times B$ sont des couples : $(x, y) \neq (y, x)$ et non des paires : $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $A \times B \neq B \times A$
- On note $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, $A \times A \times \dots \times A = A^n$ (ici A est présent n fois), ensembles formés respectivement de couples, de triplets, de n -uplets.

Exercice 2

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles : $A = \{1, 4\}$; $B = \{1, 3, 5\}$.

Déterminer en extension les ensembles produits $A \times B$ et $B \times A$.

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Si A et B sont deux **ensembles finis disjoints**, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Si (A_i) est une suite finie d'ensembles finis **deux à deux disjoints**, c'est-à-dire pour lesquels $A_i \cap A_j = \emptyset$ (pour tous indices $i \neq j$), alors :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$$

Remarque

La somme $\text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$ est notée

$$\sum_{i=1}^n \text{card}(A_i)$$

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Soit Ω un ensemble. Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω , alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Si A et B sont deux ensembles finis tels que $A \subset B$ alors

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$$

Propriété

Soient Ω un référentiel et A un sous-ensemble de Ω , alors :

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(A)$$

Propriété

Si A et B sont des ensembles finis, alors :

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

Et pour n entier naturel : $\text{card}(A^n) = \text{card}(A)^n$

Exercice 3

Dans une classe, 18 élèves font de l'anglais, 10 de l'espagnol et 7 font les deux langues.

Combien d'élèves sont dans la classe, si tous font au moins une langue ?

Exercice 4

On donne l'algorithme suivant :

Variables :

i, j, k, S (entiers)

Début

$S \leftarrow 0$

Pour i de 1 à 3 Faire

 Pour j de 1 à 50 Faire

 Pour k de 1 à 12 Faire

$S \leftarrow S+1$

 FinPour

 FinPour

FinPour

Afficher S

Fin

Quelle valeur affiche l'algorithme ?

Ecrire S comme le cardinal d'un produit d'ensembles à préciser.

Relation binaire

Définition

Soit E un ensemble. On appelle **relation** \mathcal{R} sur E , tout partie de E^2 .
L'élément (x, y) de E est alors noté : $x\mathcal{R}y$.

Exemples

- Dans \mathbb{R} , l'inégalité est une relation. $x\mathcal{R}y$ est défini par : $x \leq y$
- Dans \mathbb{N} , la congruence modulo n est une relation. $x\mathcal{R}y$ est défini par : $x \equiv y [n]$

Relation d'ordre

Définition

Soit E un ensemble. Soit \mathcal{R} une relation sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'ordre** si :

- la relation est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- la relation est **transitive** :
 $\forall (x, y, z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- la relation est **anti-symétrique** :
 $\forall (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \Rightarrow x = y$

On dit que la relation d'ordre \mathcal{R} est **totale** si tous les éléments de E sont comparables entre eux :

$$\forall (x, y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x]$$

Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre est **partielle**.

Relation d'ordre

Exemple

Dans \mathbb{R} , la relation \leq est une relation d'ordre
Cette relation d'ordre est totale.

Ensembles ordonnés

Les relations d'ordres totales permettent de définir des ensembles ordonnés de données :

- Les tableaux triés
- Les listes triées

Relation d'équivalence

Définition

Soit E un ensemble. Soit \mathcal{R} une relation sur E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si :

- la relation est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- la relation est **transitive** :
 $\forall (x, y, z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- la relation est **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

Relation d'équivalence

Exemple

- Dans \mathbb{N} , la relation de congruence modulo n :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \equiv y [n]$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 5

Pour les différentes relations \mathcal{R} ci-dessous, déterminer si \mathcal{R} est réflexive, transitive, symétrique ou anti-symétrique. En déduire quelles relations sont des relations d'ordre ou d'équivalence.

Déterminer ensuite si ce sont des relations totales ou partielles.

- Dans \mathbb{R} , $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$
- Dans \mathbb{N} , $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ est un diviseur de y
- Dans \mathbb{N} , $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est un multiple de 2
- Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments. Dans $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$
- Sur \mathbb{R}^2 la relation définie par

$$(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$$

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Langage
ensembliste

Définitions
Intersection
Réunion
Inclusion
Complémentaire
Cardinal et parties
Les ensembles en informatique

Théorie des ensembles

Définitions
Relations binaires sur un ensemble

Propriétés

Fonctions - applications
Définitions
Image - Image réciproque
Injection - Surjection - Bijection

Les propriétés des opérations \cup , \cap et \bar{A} définies sur $\mathcal{P}(E)$ correspondent aux propriétés des opérations logiques \vee , \wedge et \neg . Ces propriétés sont donc identiques.

Elles peuvent être aisément représentées à l'aide de diagrammes de Venn.

Propriété de l'inclusion

- Pour tout ensemble A , $A \subset A$ (réflexivité)
- Si A , B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transitivité)
- Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ (antisymétrie)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Propriété du complémentaire

- Si Ω est le référentiel, alors $\overline{\Omega} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = \Omega$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Langage
ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et
parties

Les ensembles
en informatique

Théorie des
ensembles

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications

Définitions

Image - Image
réciproque

Injection -
Surjection -
Bijection

Propriété de la réunion

- Idempotence : $A \cup A = A$
- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$
- Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ que l'on peut noter $A \cup B \cup C$
- Si A et B sont inclus dans C , alors $A \cup B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$

- Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$
- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup \Omega = \Omega$ (Ω étant le référentiel)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Langage
ensembliste

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et
partiesLes ensembles
en informatiqueThéorie des
ensembles

Définitions

Relations
binaires sur un
ensemble

Propriétés

Fonctions -
applications

Définitions

Image - Image
réciproqueInjection -
Surjection -
Bijection

Propriété de l'intersection

- Idempotence : $A \cap A = A$
- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$
- Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ que l'on peut noter $A \cap B \cap C$
- Si A et B sont inclus dans C , alors $A \cap B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \cap B \subset C$$

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap \Omega = A$ (Ω étant le référentiel)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Distributivité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lois de De Morgan

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Définition

Soient E et F deux ensembles. Si à tout élément x de E est associé **au plus un élément** y de F par une relation f alors on dit que f est une **fonction** de E vers F .

Remarque : « au plus » signifie un ou aucun.

On note $f : E \rightarrow F$ où :

$$x \mapsto f(x)$$

- f est le nom de la fonction
- E est l'ensemble de départ
- F est l'ensemble d'arrivée
- $x \mapsto f(x)$ donne la correspondance entre x et son image $f(x)$

La notation globale se lit « la fonction f de E dans F qui à x associe $f(x)$ ».

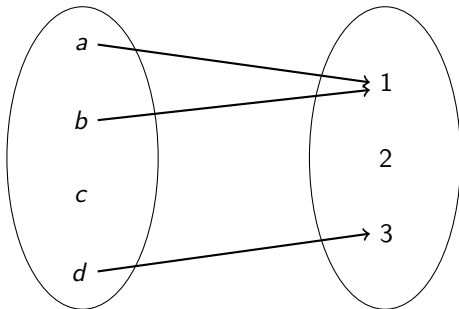
Image - antécédent : définitions

L'élément $f(x)$ est appelé **image** de x par la fonction f .

Pour tout y dans F , tout élément x de E vérifiant $f(x) = y$ est appelé **antécédent** de y par la fonction f .

Une fonction de E vers F peut également être définie par une **représentation sagittale**.

Exemple



$$f(a) = f(b) = 1; f(d) = 3$$

Définition

L'ensemble noté D_f des x qui ont une image par f est appelé **ensemble (ou domaine) de définition** de f .

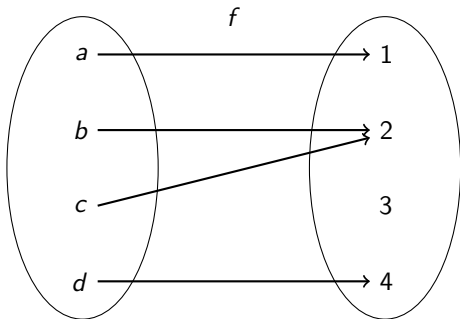
Dans l'exemple précédent, l'élément c n'ayant pas d'image :
 $D_f = \{a, b, d\}$.

Applications

Définition

Soient E et F deux ensembles. Si à **tout élément** x de E est associé un élément y de F par la fonction f alors on dit que f est une **application** de E vers F .

Exemple



f est une application de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4\}$.

Applications

Remarque

Soient f une fonction de E vers F et D_f son ensemble de définition.
Si $E = D_f$ alors f est une application de E vers F .

Pour qu'une fonction devienne une application, il suffit de réduire son ensemble de départ à son ensemble de définition.

Dans l'exemple précédent $E = \{a, b, c, d\} = D_f$.

Image - Image réciproque

Définition

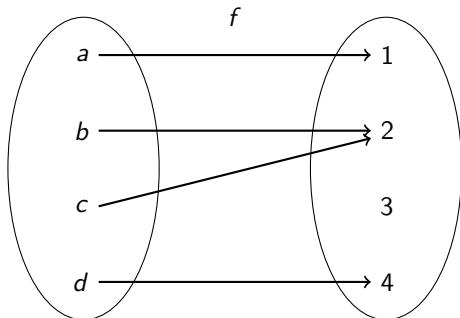
Soient E et F deux ensembles, A un sous-ensemble de E et B un sous-ensemble de F .

L'ensemble des images des éléments de A par f est appelé **image de A par f** . On le note $f(A)$.

L'ensemble des antécédents des éléments de B par f est appelé **image réciproque de B** . On le note $f^{-1}(B)$.

Image - Image réciproque

Exemple



$$f(\{a, c\}) = \{1, 2\}$$
$$f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \{b, c, d\}$$

Exercice 6

On considère la fonction f de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par : $f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 3$.

- 1 Donner la représentation sagittale de f .
- 2 Quel est le domaine de définition D_f de f ? Est-ce que f est une application ?
- 3 Quelle est l'image de $A = \{a, b, d\}$ par f ?
- 4 Quelle est l'image réciproque de $B = \{1, 2, 5\}$ par f ?

Injection – Surjection – Bijection

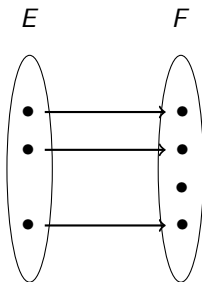
Définition

Soient E et F deux ensembles, et f est une application de E dans F .
On dira que :

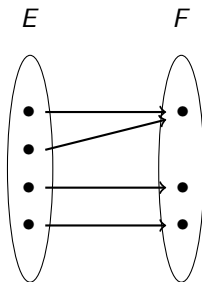
- f est une **injection** de E dans F si tout élément y de F admet **au plus** un antécédent x de E .
- f est une **surjection** de E sur F si tout élément y de F admet **au moins** un antécédent x de E .
- f est une **bijection** de E sur F si tout élément y de F admet **un et un seul** antécédent x de E .

Injection – Surjection – Bijection

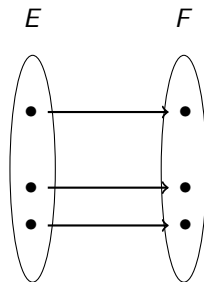
Exemple



Injection



surjection



bijection

Injection – Surjection – Bijection

Pour déterminer si l'application f de E dans F est une injection, une surjection ou une bijection, on remarquera que pour a élément donné de F :

- si l'équation $f(x) = a$ admet **au plus** une solution x dans E alors f est une **injection** ;
- si l'équation $f(x) = a$ admet **au moins** une solution x dans E alors f est une **surjection** ;
- si l'équation $f(x) = a$ admet **une et une seule** solution x dans E alors f est une **bijection**.

Exercice 7

On considère la fonction f de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par : $f(a) = 2$; $f(b) = 3$; $f(c) = 5$; $f(d) = 3$.

- 1 Résoudre dans E les équations d'inconnue x : $f(x) = 3$ et $f(x) = 1$.
- 2 Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 8

Pour s'échanger des messages codés, Alice et Bob utilisent leur clavier téléphonique. Le chiffre 2 sert à coder les lettres A, B, C ; le chiffre 3 sert à coder les lettres D, E, F, etc.

- 1 Quel nombre Alice va-t-elle envoyer à Bob pour lui dire BRAVO ?
- 2 Bob est-il sûr de comprendre ?
- 3 Quelle propriété de l'application : lettre \mapsto chiffre n'est pas respectée, qui permettrait de décoder le message de façon certaine ?
- 4 Proposer une adaptation de la méthode permettant d'avoir un décodage unique.

Exercice 9

- 1 Pour un certain type de codage, on a besoin de coder les lettres A, B, C, D. On commence par attribuer un nombre à chaque lettre : $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$. Puis on multiplie par 2 le nombre et on ajoute 3. On cherche ensuite le reste de la division euclidienne par 4. A ce reste correspond alors une lettre qui est la lettre cryptée.
Comment seront cryptées les lettres A, B, C, D ? Ce type de codage est-il acceptable ?
- 2 On décide de modifier le procédé. On multiplie par 3 le nombre et on ajoute 2. Et on cherche encore le reste de la division euclidienne par 4. Vérifier que l'on a un codage bijectif.

Exercice 10

Un administrateur réseau gère le parc d'une petite entreprise qui comprend 9 ordinateurs. Chaque ordinateur possède une adresse de carte réseau, dite adresse MAC (Media Access Control) unique.

Cette adresse est composée de 6 nombres entiers compris entre 0 et 255 séparés par des « : ».

Chacun des 6 nombres est codé en hexadécimal.

L'administrateur a assigné une adresse IP (Internet Protocol) à chaque ordinateur à l'aide d'un logiciel installé sur le serveur. Il obtient le tableau suivant :

Adresse MAC	N° de l'ordinateur	Adresse IP
00 : FF : B4 : A9 : 96 : 11	1	172.16.0.21
00 : FF : B4 : B0 : 45 : 1A	2	172.16.0.22
00 : FF : B4 : 00 : C5 : DE	3	172.16.0.23
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C4	4	172.16.0.24
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C5	5	172.16.0.25
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C6	6	172.16.0.26
00 : FF : B4 : 00 : C5 : DF	7	172.16.0.27
00 : FF : B4 : 00 : 02 : 98	8	172.16.0.28
00 : EE : B5 : 01 : 34 : CA	9	172.16.0.29

Exercice 10 (suite)

On considère l'application f qui, à un numéro d'ordinateur, associe la dernière partie de l'adresse IP.

Cette dernière partie est un entier variant de 2 à 255.

$$f : \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\} \longmapsto \{2 ; 3 ; \dots ; 255\}.$$

Par exemple, $f(1) = 21$.

- ① Justifier le fait que cette application est injective.
- ② Cette application est-elle surjective? Justifier.
- ③ À la suite d'une opération informatique, le poste dont l'adresse MAC est
00 : FF : B4 : 00 : C5 : DF obtient l'adresse IP suivante :
172.16.0.23. Les autres postes gardent leur adresse IP
précédente.

On a alors une nouvelle application

$$g : \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\} \longmapsto \{2 ; 3 ; \dots ; 255\}.$$

L'application g est-elle injective? Justifier.

Exercice 11 : le bit de parité

Langage
ensembliste

Définitions
Intersection
Réunion
Inclusion
Complémentaire
Cardinal et
parties
Les ensembles
en informatique

Théorie des
ensembles

Définitions
Relations
binaires sur un
ensemble
Propriétés
Fonctions -
applications
Définitions
Image - Image
réciproque
**Injection -
Surjection -
Bijection**

Etant donné un nombre représenté en base 2 par $A = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$, le bit de parité est défini comme :

$$\beta = \sum_{i=1}^n a_i \pmod{2}$$

Autrement dit, le bit de parité vaut 0 si le nombre de 1 est pair, et il vaut 1 si le nombre de 1 est impair.

Exercice 11 : le bit de parité (suite)

Intégrité d'une adresse IPv4

Prenons par exemple le cas d'une adresse IPv4 de 32 bits que l'on découpe en 4 mots de 8 bits :

255.245.26.53 s'écrit en binaire 11111111 11110101 00011010 00110101

sur lequel nous calculons une clé de contrôle de la forme $abcd$ où a , b , c et d sont les bits de parités de chaque mot de 8 bits.

Nous avons ainsi une application p de l'ensemble des mots des adresses IPv4 exprimées en binaire vers l'ensemble des mots de 4 bits.

Nous appellerons E l'ensemble des mots des adresses IPv4 exprimées en binaire et F l'ensemble des mots de 4 bits

- ① Déterminer la clé de contrôle du nombre ci-dessus
- ② Décrire l'ensemble F , en citant tous ses éléments.
- ③ Cette application p est-elle injective ? Justifier.
- ④ Cette application p est-elle surjective ? Justifier.
- ⑤ Cette application p est-elle bijective ? Justifier
- ⑥ Que représente $p^{-1}(\{1101\})$?
- ⑦ Quel est le cardinal de $p^{-1}(\{1101\})$?
- ⑧ Soit b l'application de F vers G où

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ qui à tout mot de 4 bits associe sa valeur en base 10. Réaliser un diagramme sagittal de cette application b . L'application b est-elle une bijective ? Justifier.