Ensembles

Partie 1 : Langage ensembliste

Laurent Debize

BTS SIO

Langage ensembliste

Définition

On appelle **ensemble**, toute collection d'objets, ceux-ci étant appelés **éléments** de l'ensemble.

Exemples

- L'ensemble des entiers naturels impairs
- L'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers)
- L'ensemble des élèves d'une classe

Langage ensembliste

Notation

Un ensemble est noté entre accolades. Exemple : $E = \{0\,;\,1\,;\,2\}$
On note $x \in E$(lire x appartient à E) pour signifier que l'élément x appartient à l'ensemble E.
On note $x \notin E$(lire x n'appartient pas à E) pour signifier que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E.

Remarques

- Chaque élément ne figure qu'une seule fois et l'ordre dans lequel ces éléments sont écrits n'a pas d'importance.
- On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ tout ensemble qui ne contient aucun élément.

Deux façons de définir un ensemble

En extension

Définir un ensemble **en extension** signifie donner tous les éléments de cet ensemble.
Exemple : $E = \{0\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,12\}$

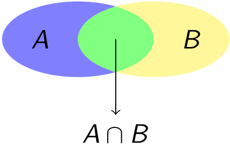
En compréhension

Définir un ensemble **en compréhension** signifie exprimer les éléments de cet ensemble à l'aide d'une proposition.
Exemple : $F = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 10\}$
Le symbole $|$ se lit « tel que »
L'ensemble F se lit « l'ensemble des x dans $\mathbb{N}$ tels que $x \leq 10$ »
En extension, l'ensemble F s'écrit :
$F = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\}$

Intersection

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
L'intersection des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.
Remarque :
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**

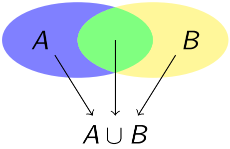


Cette représentation graphique s'appelle un **diagramme de Venn.**
On peut définir $A \cap B$ de la manière suivante (écriture axiomatique) :
$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$
Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **et** à B »

Réunion

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
La **réunion** des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Écriture axiomatique :
$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **ou** à B »

Remarque

Le mot « ou » ici signifie « ou l'un ou l'autre ou les deux » :
$A \cup B$ contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.

Réunion

Exemples

Soient A et B les deux ensembles de nombres suivants :
$A = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\}$ et
$B = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\}$

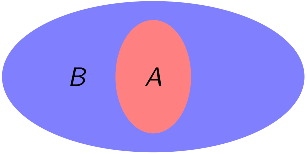
$A \cap B = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\}$ (éléments communs à A et à B)
$A \cup B = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,13\,;\,17\}$
Cet ensemble contient tous les éléments de A et tous les éléments de B (on n'écrit qu'une seule fois le même élément).

Inclusion

Définition

On dit que l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B pour indiquer que tous les éléments de A appartiennent aussi à B.
On note $A \subset B$.

On a toujours, pour n'importe quel ensemble A : $A \subset A$ et $\varnothing \subset A$



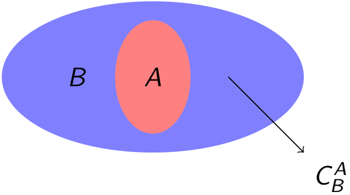
On dit aussi que A est une partie de B ou bien que A est un **sous-ensemble** de B.
Pour dire que A n'est pas inclus dans B, on emploiera la notation : $A \not\subset B$.

Complémentaire

Définition

Supposons que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. On appelle le complémentaire de A dans B et on note C_B^A ou $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit :

$$x \in C_B^A \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \notin A$$



Remarque

On dit que B constitue le référentiel (l'ensemble auquel on se réfère pour prendre le complémentaire).

Définitions

Intersection

Réunion

Inclusion

Complémentaire

Cardinal et parties

Correspondances parties - propriétés

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Définition

On appelle **partie** d'un ensemble E ou **sous-ensemble** de E, tout ensemble inclus dans E. Une partie de E est donc un ensemble constitué avec des éléments de E.

On appelle **cardinal** d'un ensemble et on note : $card(E)$ le nombre de ses éléments.

Exemple

Soit E l'ensemble de lettres suivant :
$E = \{a, b, c, d\}$
On a $card(E) = 4$ (E contient 4 éléments)

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Parties de $E = \{a, b, c, d\}$:

- L'ensemble E lui-même constitue une partie de E : on l'appelle la **partie pleine** de E
- L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de E : on l'appelle la **partie vide** de E
- Une partie ne contenant qu'un seul élément est appelée un **singleton**
  Les parties à un élément s'écrivent : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{d\}$: il y en a quatre
- Parties à deux éléments : $\{a, b\}\{a, c\}\{a, d\}\{b, c\}\{b, d\}\{c, d\}$
- Parties à trois éléments : $\{a, b, c\}\{a, b, d\}\{a, c, d\}\{b, c, d\}$

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Dans notre cas :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \{a,b\}; \{a,c\}; \{a,d\}; \{b,c\}; \{b,d\}; \{c,d\}; \\ \{a,b,c\}; \{a,b,d\}; \{a,c,d\}; \{b,c,d\}; \{a,b,c,d\} \end{array} \right\}$$

Pour déterminer les parties d'un ensemble on peut réaliser un arbre.
On constate, sur cet exemple, que E contient 16 éléments. Nous pouvons donc écrire que $card(\mathcal{P}(E)) = 16$

Propriété

Si n désigne le cardinal de E, alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Correspondances entre les parties d'un ensemble E et les propriétés définies sur cet ensemble E

Soient A et B deux parties de E ; p une propriété caractéristique des éléments de A et q une propriété caractéristique des éléments de B.
Par exemple $E = \mathbb{N} =$ ensemble des entiers naturels
Et $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
La propriété p qui caractérise les éléments de A serait : « être un entier pair compris entre 1 et 11 ».
On notera $p(x)$ pour signifier que l'élément x vérifie la propriété p.
La **négation** d'une propriété p se notera : « non p ».
Quantificateurs : $\forall$ signifie « quel que soit » et $\exists$ signifie « il existe ».
Le symbole $\Rightarrow$ est le symbole de l'**implication**

La proposition $\forall x \in E, p(x) \Rightarrow q(x)$ se lira :
Quel que soit l'élément x de E, **SI** x possède la propriété p, **ALORS** x possède la propriété q.

Correspondances entre les parties d'un ensemble E et les propriétés définies sur cet ensemble E

Equivalence

Pour noter que deux propositions p et q sont **équivalentes**, on utilise le symbole $\Leftrightarrow$.

Exemple

$\ll$ x est un nombre pair $\gg$ $\Leftrightarrow$ $\ll$ x est divisible par 2 $\gg$
Deux propositions (ou deux propriétés) sont équivalentes lorsqu'elles veulent dire la même chose...

Le symbole de l'équivalence peut se traduire par un double symbole d'implication. En effet :
x est pair $\Rightarrow$ x est divisible par 2 (si x est pair, alors il est divisible par 2)
Mais aussi :
x est divisible par 2 $\Rightarrow$ x est pair (si x est divisible par 2, alors x est pair)
Ces deux implications sont **réciproques** l'une de l'autre.

Correspondances entre les parties d'un ensemble E et les propriétés définies sur cet ensemble E

Le tableau suivant résume les correspondances entre les différentes parties et les propriétés :

Parties de E	Propriétés
$x \in A$	$p(x)$
$x \in B$	$q(x)$
$A \subset B$	$\forall x \in E, p(x) \Rightarrow q(x)$
$A = B$	$\forall x \in E, p(x) \Leftrightarrow q(x)$
$x \in C_E^A$	Non $p(x)$
$x \in A \cap B$	$p(x)$ et $q(x)$
$x \in A \cup B$	$p(x)$ ou $q(x)$
$A \cap B = \varnothing$	$\forall x \in E, p(x)$ et $q(x)$ incompatibles

Exercices 1 à 5