Logique

Partie 1 : Propositions Prédicats

Laurent Debize

BTS SIO

Calculs propositionnels

En logique, deux objets sont rencontrés :

- Des propositions (« phrases »mathématiques)
- Des connecteurs logiques (pour manipuler ces « phrases »)

Propositions

Les expressions mathématiques sont composées :

- de **termes** (ou « mots » mathématiques) qui doivent respecter une orthographe
  Les termes représentent des **objets**
  Exemples :
  $$-4\,;\ \frac{1}{6}\,;\ x\,;\ A$$
- d'**énoncés** (ou « phrases » mathématiques) qui doivent respecter une syntaxe (ou « grammaire »)
  Les énoncés énoncent des **faits**
  Exemples :
  - $2+2=4$
  - 8 est divisible par 3
  - $y>7$
  - $-x+y=3$ ($a=b$ qu'on lit « a égale b » signifie que a et b représentent la même entité mathématique)

Propositions

Remarque

Certaines expressions n'ont aucun sens mathématique :
Exemples :

$$\frac{1}{0}\ ;\ + = \times\ ;\ \sqrt{-1}$$

Parmi les énoncés précédents certains sont vrais, d'autres faux.
« Vrai (V) » et « Faux (F) » sont appelés **valeurs de vérité**.
La logique qui ne comporte que ces deux valeurs de vérité est appelée **logique binaire** : un énoncé qui n'est pas vrai est faux et réciproquement.

Exemples :

- « $2 + 2 = 4$ » est un énoncé vrai
- « 5 est un nombre impair » est un énoncé vrai
- « pour tout réel x, $x^2 + 1 < 0$ » est un énoncé faux

Propositions

Définition

On appelle **proposition** ou **assertion** un énoncé qu'on peut juger sans ambiguïté Vrai ou Faux.

Notation

Les propositions sont généralement notées par des lettres majuscules (P, Q, etc.)

Exemples

- $2+2=4$ est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est vrai donc c'est une proposition vraie.
- « 8 est divisible par 3 » est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est faux donc c'est une proposition fausse.
- « Le professeur est sympathique », **énoncé très subjectif**, n'est pas une proposition.
- « $x+2=0$ » n'est pas une proposition car **la valeur de vérité dépend du réel x**.

Exercice 1

Connecteurs logiques

A partir de propositions initiales, on peut définir de nouvelles propositions au moyen de **connecteurs logiques** comme :

- la négation
- la conjonction
- la disjonction
- l'implication
- l'équivalence

Ces transformations sont appelées des **opérations logiques**.

Ces opérations logiques peuvent aussi être définies par leurs tables opératoires appelées **tables de vérité**.

Négation

Définition

Soit P une proposition.
La négation de la proposition P est la proposition ≪ non P ≫.
Elle est vraie lorsque P est fausse et vice-versa.

Notation

Cette proposition est notée $\neg$P, $\overline{P}$ ou non P.
$\neg$ est le connecteur NON.

Table de vérité

P	$\neg$P
V	F
F	V

Exemple

Soient a un réel et P la proposition ≪ $a > 3$ ≫.
La proposition $\neg$P est la proposition ≪ $a \leq 3$ ≫.

Conjonction

Définition

Soient P et Q deux propositions.
La conjonction des propositions P et Q est la proposition « P et Q ».
Elle n'est vraie que si les propositions P et Q sont vraies simultanément.

Notation

Cette proposition est notée $P \wedge Q$.
$\wedge$ est le connecteur ET.

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjonction

Exemple

Soient a un réel, P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a > 8$ ».
La proposition $P \wedge Q$ est la proposition « $a > 8$ ».

Disjonction

Définition

Soient P et Q deux propositions.
La disjonction des propositions P et Q est la proposition « P ou Q ».
Elle est vraie si au moins une de deux propositions P et Q est vraie.

Notation

Cette proposition est notée $P \vee Q$.
$\vee$ est le connecteur OU.

Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjonction

Exemple

Soient a un réel, P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a > 8$ ».
La proposition $P \vee Q$ est la proposition « $a > 3$ ».

Remarque

Le connecteur $\vee$ utilisé en logique n'est pas le OU du langage courant : choisir « fromage ou dessert » est le plus souvent interprété comme un choix exclusif (ou l'un ou l'autre mais pas les deux).

Exercice 2

Equivalence

Définition

Soient P et Q deux propositions.
L'équivalence des propositions P et Q est la proposition ≪ P si et seulement si Q ≫.
Elle est vraie si les deux propositions P et Q ont la même valeur de vérité.

Notation

Cette proposition est notée ≪ $P \Leftrightarrow Q$ ≫
$\Leftrightarrow$ est le connecteur ...SI ET SEULEMENT SI...

Table de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Equivalence

Exemple

Soient a un réel, P la proposition « $a > 3$ » et Q la proposition « $a^2 > 9$ et $a > 0$ ».
On a P $\Leftrightarrow$ Q

Implication

Définition

Soient P et Q deux propositions.
L'implication des propositions P et Q est la proposition « P implique Q ».
Elle est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies, ou si P est fausse.

Notation

Cette proposition est notée « $P \Rightarrow Q$ », « Si P alors Q », « P entraîne Q »
$\Rightarrow$ est le connecteur SI... ALORS...

Table de vérité

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Implication

Exemple

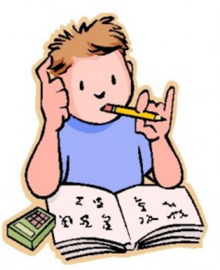
Soient a un réel, P la proposition « $a > 8$ » et Q la proposition « $a > 3$ ».
Si « $a > 8$ » est vrai alors « $a > 3$ » est vrai, et si « $a > 8$ » est faux alors « $a > 3$ » est soit vrai soit faux.
On a donc P $\Rightarrow$ Q

Remarque

Les deux dernières lignes de la table de vérité de « P $\Rightarrow$ Q » montrent que le sens que les mathématiques donnent aux mots « implique » et « entraîne » est plus général que le langage courant.
Exemple :

- « $2 + 2 = 5$ » $\Rightarrow$ « La France a gagné la coupe du monde en 1998 » **est vraie**
- « La France a gagné la coupe du monde en 2014 » $\Rightarrow$ « $2 + 2 = 5$ » **est vraie**

Exercice 3



Propriétés des opérateurs logiques

Dans cette partie, P, Q et R désignent des propositions, V et F désignent les valeurs de vérité vrai et faux.

Propriétés du connecteur NON

- $\neg(\neg P) = P$
- $\neg V = F$ et $\neg F = V$

Propriétés du connecteur OU

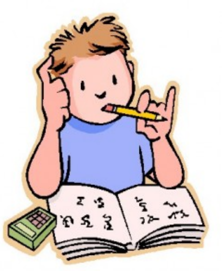
- idempotence : $P \vee P = P$
- commutativité : $P \vee Q = Q \vee P$
- associativité : $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$ que l'on peut donc noter $P \vee Q \vee R$ (à démontrer dans l'exercice 4)
- $P \vee F = P$ et $P \vee V = V$

Propriétés des opérateurs logiques

Propriétés du connecteur ET

- idempotence : $P \wedge P = P$
- commutativité : $P \wedge Q = Q \wedge P$
- associativité : $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$ que l'on peut donc noter $P \wedge Q \wedge R$ (cf exercice 4)
- $P \wedge F = F$ et $P \wedge V = P$

Exercice 5



Propriétés des opérateurs logiques

Distributivité

- $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- P : « $a > 0$ »
- Q : « $a < -3$ »
- R : « $3 < a$ »

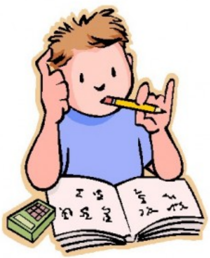
$P \wedge (Q \vee R)$ est la proposition $(a > 0) \wedge (a < -3 \vee 3 < a)$

c'est-à-dire $(a > 0 \wedge a < -3) \vee (a > 0 \wedge 3 < a)$

soit $F \vee (a > 0 \wedge 3 < a)$

donc $P \wedge (Q \vee R) = 3 < a$

Exercice 6



Propriétés des opérateurs logiques

Lois de De Morgan

- $\neg(P \vee Q) = (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- $\neg(P \wedge Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- P : « $a < -3$ »
- Q : « $3 < a$ »

$P \vee Q$ est la proposition $(a < -3) \vee (3 < a)$
$\neg(P \vee Q)$ est la proposition $\neg((a < -3) \vee 3 < a))$
c'est-à-dire $(a \geq -3) \wedge (3 \geq a)$
soit $-3 \leq a \leq 3$

Propriétés des opérateurs logiques

Propriétés du connecteur $\Rightarrow$

- réflexivité : $P \Rightarrow P$
- anti-symétrie : Si $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ alors $P \Leftrightarrow Q$
- transitivité : Si $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ alors $P \Rightarrow R$
- contraire : $(P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$ (cf exercice 7)
- contra-posée : $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (cf exercice 10)

Exemple

Soit a un réel.
La proposition (vraie) « $a > 3 \Rightarrow a^2 > 9$ » est équivalente à la proposition (vraie) « $a^2 \leq 9 \Rightarrow a \leq 3$ »

Calcul des prédicats

Rappel

- Une constante est un nombre dont la valeur est fixée
- Une variable est un nombre pouvant prendre différentes valeurs

Prédicat

Définition

On appelle **prédicat** (ou fonction propositionnelle) un énoncé contenant une ou plusieurs variables et qui se transforme en proposition suivant la valeur attribuée à ces variables.

Exemples

- x étant une variable réelle, « $2x + 1 = 7$ » est un prédicat à une variable
  car si $x = 3$ alors $2x + 1 = 7$ est un énoncé vrai
  et si $x \neq 3$ alors $2x + 1 = 7$ est un énoncé faux.
- « $5x + 5y = 15$ » est un prédicat à deux variables.

Quantificateurs

Définition

Une proposition peut contenir des **quantificateurs**. Il en existe principalement 2 :

- Le quantificateur $\forall$ est appelé **quantificateur universel**. Il se lit « quel que soit » ou « pour tout ».
- Le quantificateur $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**. Il se lit « il existe ».

Une proposition comporte des virgules :

- Après le quantificateur $\forall$, la virgule signifie « on a ».
- Après le quantificateur $\exists$, la virgule signifie « tel que ».

Quantificateurs

Exemple de quantificateur universel

Pour tout réel x dans $[-1; +\infty[$, on sait que $x + 1 \geqslant 0$.
On note : $\forall x \in [-1; +\infty[, \ x + 1 \geqslant 0$.

Remarque : $x + 1 > 0$ est un prédicat alors que $\forall x \in [-1; +\infty[, \ x + 1 \geqslant 0$ est une proposition (**vraie ici**)

Exemple de quantificateur existentiel

On sait qu'il existe au moins un réel x tel que $x - 1 > 0$.
On note : $\exists x \in \mathbb{R}, \ x - 1 > 0$.

Remarques :

- $x - 1 > 0$ est un prédicat alors que $\exists x \in \mathbb{R}, \ x - 1 > 0$. est une proposition (**vraie ici**)
- La proposition ne dit pas comment trouver x, ni combien de tels x existent

Négation des quantificateurs

Propriétés

Soit $p(x)$ un prédicat à une variable :

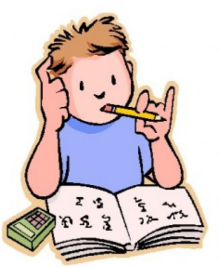
- La négation de la proposition « $\forall x,\ p(x)$ » est la proposition « $\exists x,\ \neg p(x)$ »
- La négation de la proposition « $\exists x,\ p(x)$ » est la proposition « $\forall x,\ \neg p(x)$ »

Négation des quantificateurs

Exemples

- La proposition « $\exists x,\ x^2 = 4$ » a pour négation la proposition « $\forall x,\ x^2 \neq 4$ »
- Puisque $(P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)$, la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition $(P \wedge \neg Q)$
- La négation de la proposition « $\forall x,\ x \in E \Rightarrow p(x)$ » est la proposition « $\exists x,\ x \in E \wedge \neg p(x)$ »
- La négation de la proposition « $\exists x,\ x \in E \Rightarrow p(x)$ » est la proposition « $\forall x,\ x \in E \wedge \neg p(x)$ »

Exercice 8



Ordre des quantificateurs

Exemple

Pour x et y réels, considérons les propositions :

$$\ll \forall x,\ \exists y,\ y = x^2 \gg \qquad \text{et} \qquad \ll \exists y,\ \forall x,\ y = x^2 \gg$$

$\ll \forall x,\ \exists y,\ y = x^2 \gg$ signifie que tout réel x possède un carré y. C'est une proposition vraie.
$\ll \exists y,\ \forall x,\ y = x^2 \gg$ signifie qu'il existe au moins un réel y égal à tous les carrés des nombres réels. C'est une proposition fausse.

L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ n'est donc pas indifférent !

Exercice 9 à 14