Suites numériques

Partie 1 : Généralités sur les suites numériques

Laurent Debize

BTS SIO

Définition - propriétés

- Suite numérique
- Suite alternée
- Suite récurrente

Variations des suites

- Variations des suites
- Suites monotones
- Suites bornées

Définition - propriétés

Définition

Une **suite numérique** u définie sur $\mathbb{N}$ est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$

$$u : n \mapsto u(n)$$

$u(n)$ est le terme général de la suite u. On le note encore u_n. La suite u est aussi notée (u_n), $n \in \mathbb{N}$.

Définition - propriétés

Exemples

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto 2n+1$ a pour terme général
$$u_n = 2n+1$$
Ses premiers termes sont : $u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_3 = 7,...$
C'est la suite des nombres impairs.
- La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n(n+1)}$ a pour premiers termes :
$$v_1 = \frac{3}{2},\ v_2 = 1,\ v_3 = \frac{11}{12},\ \text{etc.}$$
- Soit (w_n) la suite des nombres premiers, c'est-à-dire des nombres entiers qui ont 2 diviseurs entiers distincts (1 et eux mêmes).
$$w_0 = 2,\ w_1 = 3,\ w_2 = 5,\ w_3 = 7,\ w_4 = 11,\ \text{etc.}$$

Définition - propriétés

Remarque

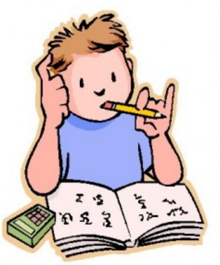
Parmi les suites précédentes certaines peuvent être notées $u_n = f(n)$, et ne sont que des cas particuliers de fonctions numériques définies seulement sur $\mathbb{N}$.

Ces suites sont représentées comme des fonctions dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'abscisse n et d'ordonnée u_n.

Exemples

Pour u et v définies, respectivement, par $u_n = 2n + 1$ et $v_n = \dfrac{n^2 + 2}{n(n+1)}$.

Exercice 1



Définition - propriétés

Remarque

Une suite numérique u peut aussi être définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$ qui est l'ensemble des indices de la suite. Nous ne traiterons que les suites définies sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{N}^*$.

Suite alternée

Définition

Si pour tout indice n on a : $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ la suite est dite **alternée**.

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ a pour premiers termes :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{3}, \text{etc.}$$

Elle est alternée car :

$$u_n \cdot u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Suite récurrente

Définition

On appelle **suite récurrente** toute suite définie par un ou plusieurs premiers termes et une relation liant des termes successifs de cette suite.

Exemple

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$ est une suite récurrente.

On a successivement :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 6 = 6,$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 6 = 9,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 6 = \frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}, \text{ etc.}$$

Exercice 2

Définition - propriétés

- Suite numérique
- Suite alternée
- Suite récurrente

Variations des suites

- Variations des suites
- Suites monotones
- Suites bornées

Variations des suites

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto u_n$. On rappelle que :

- u est **croissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} \geq u_n$
- u est **strictement croissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} > u_n$
- u est **décroissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} \leq u_n$
- u est **strictement décroissante** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} < u_n$
- u est **stationnaire** sur I si $\forall n \in I, u_{n+1} = u_n$

Remarque

L'étude des variations de u revient donc à l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Variations des suites

Exemples

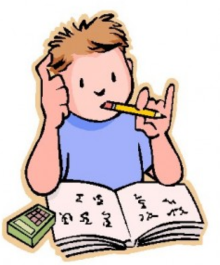
- Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$? On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 - (3n-5) \\ &= 3n + 3 - 3n \\ &= 3 \\ u_{n+1} - u_n > 0 &\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \end{aligned}$$

  Donc (u_n) est strictement croissante.

- Quel est le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$?
  On calcule $v_{n+1} - v_n = -5 < 0$
  Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

Exercice 3



Variations des suites

Remarque

Pour les suites à termes **strictement positifs** on a :

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ et}$$

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

L'étude des variations de u revient alors à comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Variations des suites

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ est une suite à termes **strictement positifs**.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} \\
&= \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+2}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et (u_n) est une suite strictement décroissante.

Exercice 4

Suites monotones

Définition

On dit que la suite u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

On dit que la suite u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples

- Les suites (u_n) et (v_n) par :

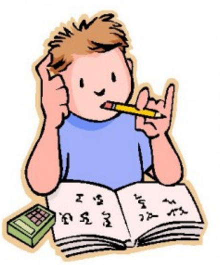
$$u_n = 3n - 5 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

  sont des suites strictement monotones.
- La suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n n$ et dont les premiers termes sont :

$$w_0 = 0,\ w_1 = -1,\ w_2 = 2,\ \ldots$$

  n'est pas une suite monotone.

Exercice 6



Suites bornées

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u : n \mapsto u_n$

- On dit que u est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- On dit que u est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
- Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_n = -n + 1$ est une suite décroissante majorée par $M = 1$ et qui n'est pas minorée.
- La suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ est une suite décroissante à termes positifs.
  On a $0 \leq v_n \leq v_0$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 1$.
  La suite (v_n) est une suite majorée et minorée. Elle est donc bornée.

Suites bornées

Remarque

Les réels m et M cherchés, appelés respectivement minorant et majorant de la suite, doivent être indépendants de l'indice n.

Exercice 7