Matrices

Partie 2 : Systèmes linéaires

Laurent Debize

BTS SIO

Exemple préliminaire

Résolvons le système d'équations d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -5 \\ 2x + 8y - z = 6 \\ 3x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

Comment résoudre ce système ?

Exemple préliminaire

Pour résoudre ce système d'équations, nous noterons L_1, L_2 et L_3 les lignes successives du système :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y-4z=-5 & L_1 \\ 2x+8y-z=6 & L_2 \\ 3x+3y-2z=-1 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y-4z=-5 & L_1 \\ 2y+7z=16 & \text{en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2-2\cdot L_1 \\ -6y+10z=14 & \text{en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3-3\cdot L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y-4z=-5 & L_1 \\ 2y+7z=16 & L_2 \\ 31z=62 & \text{en remplaçant } L_3 \text{ par } L_3+3\cdot L_2 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-3y+4z-5 \\ 2y=-7z+16 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Exemple préliminaire

Ce qui donne comme solution au système

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Généralités

Définitions

On appelle **système linéaire** de n **équations à** p **inconnues** $x_1, \cdots, x_p$ la donnée d'un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\cdot x_p & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\cdot x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\cdot x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les nombres a_{ij} sont connus et les paramètres $b_1, \cdots, b_n$ également.

Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** s'ils ont exactement les mêmes solutions.

Généralités

Définitions

Le tableau de réels $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ est la **matrice associée au système linéaire**.

La matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le **second membre**.

On note également pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, L_i la $i$ème équation.

Généralités

Exemple

Le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y - z = 1 \\ 5x - 3y + 2z = 6 \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues x, y et z.

Préliminaire : Résolution de systèmes triangulaires

Dans la suite on note S l'ensemble des solutions de chacun des systèmes.

Exemple 1

Le système :

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ y+3z=1 \\ z=2 \end{cases}$$

a pour solutions :

$z=2$ puis

$y=-5$ et

$x=13$

D'où $S=\{(13,-5,2)\}$

Préliminaire : Résolution de systèmes triangulaires

Exemple 2

Le système :

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ \quad y+3z=1 \\ \qquad 0z=2 \end{cases}$$

a pour ensemble de solutions $S=\varnothing$.

Préliminaire : Résolution de systèmes triangulaires

Exemple 3

Le système :

$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ \quad\;\; y + 3z = 1 \end{cases}$ est équivalent au système

$$\begin{cases} x = -2y - z + 5 \\ y = -3z + 1 \end{cases}$$

on pose par exemple $z = k$, et l'on obtient :
$y = 1 - 3k$ et
$x = 3 + 5k$
c'est-à-dire une infinité de solutions.

$$S = \{(3 + 5k, 1 - 3k, k) \quad | \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Transformations élémentaires

Définition

On appelle **transformation élémentaire** sur les lignes d'un système linéaire toute transformation du type :

- Échange de l'ordre de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication de la ligne L_i par un réel non nul : $L_i \leftarrow a \cdot L_i$
- Addition à la ligne L_i du produit d'une autre ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow L_i + a \cdot L_j$

Remarque

Les deux dernières transformations peuvent être remplacées par la substitution à la ligne L_i de toute combinaison linéaire de L_i avec une autre ligne L_j : $L_i \leftarrow a \cdot L_i + b \cdot L_j$ $(a \neq 0)$.

Transformations élémentaires

À l'aide des **transformations élémentaires** précédentes la méthode du pivot de Gauss va consister à obtenir des systèmes triangulaires, en utilisant la propriété :

Propriété

Toute transformation élémentaire appliquée à un système d'équations linéaires donne un système d'équations linéaires équivalent.

Méthode du pivot de Gauss

Comment résoudre un système linéaire ?

- si $a_{11} \neq 0$ garder la ligne L_1, sinon, l'échanger avec une ligne où figure l'inconnue x_1
- combiner les lignes suivantes avec L_1 pour éliminer l'inconnue x_1 à partir de la deuxième équation
- refaire la même chose avec le sous-système sans la ligne L_1 et sans l'inconnue x_1
- aboutir à un système triangulaire
- exprimer la première inconnue de la dernière ligne en fonction des autres inconnues (qui deviennent des paramètres) s'il y en a ou bien calculer directement cette inconnue
- remonter dans les lignes pour obtenir les autres inconnues.

Méthode du pivot de Gauss

Exemple 1

Résolvons le système :

$$\begin{cases} 3x+3y-4z=-5 & L_1 \\ 2x+8y-z=6 & L_2 \\ 3x+4y-2z=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3y-4z=-5 & \\ 18y+5z=28 & L_2 \leftarrow 3\cdot L_2 - 2\cdot L_1 \\ y+2z=5 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+3y-4z=-5 & \\ 18y+5z=28 & \\ 31z=62 & L_3 \leftarrow 18\cdot L_3 - L_2 \end{cases}$$

D'où $S = \{(0,1,2)\}$

Méthode du pivot de Gauss

Exemple 2

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y + z = -5 & L_1 \\ 3x + y - z = 6 & L_2 \\ 2x + 3y - 2z = -1 & L_3 \\ y + z = 2 & L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = -5 & \\ -2y - 4z = 21 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ y - 4z = 9 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ y + z = 2 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = -5 & \\ -2y - 4z = 21 & L_2 \\ -12z = 39 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ -2z = 25 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{cases}$$

D'où $S = \varnothing$

Méthode du pivot de Gauss

Exemple 3

Résolvons le système :

$$\begin{cases} x+y-z+t=4 & L_1 \\ -x+y-z+t=2 & L_2 \\ 2x-y-4z+3t=0 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z+t=4 & \\ 2y-2z+2t=6 & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ -3y-2z+t=-8 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z+t=4 & \\ 2y-2z+2t=6 & \\ -10z+8t=2 & L_3 \leftarrow 2L_3+3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=-t+4 \\ 2y-2z=-2t+6 \\ -5z=-4t+1 \end{cases}$$

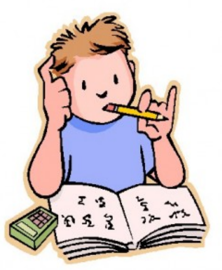
C'est un système mis sous forme triangulaire. On pose par exemple $t=k$, et l'on obtient z, y et x, c'est-à-dire une infinité de solutions.

Méthode du pivot de Gauss

Remarques

Dans certains des cas précédents les résolutions auraient pu être largement simplifiées : les résolutions ont privilégié l'aspect algorithmique (donc programmable) de la méthode.
En calculant à la main, rien ne nous empêche de changer l'ordre des lignes pour faciliter les calculs.

Feuille 2 Exercices 1, 2 et 3



Exemple préliminaire

Généralités

Méthode du Pivot de Gauss

Préliminaire : Résolution de systèmes triangulaires

Transformations élémentaires

Résolution matricielle d'un système linéaire

Résolution matricielle d'un système linéaire

On l'utilise pour la résolution des systèmes de n équations à n inconnues. Nous observerons la démarche dans le cas des systèmes de 3 équations à 3 inconnues :
Imaginons que devions résoudre le système suivant d'inconnues x, y et z :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot x & + & a_{12}\cdot y & + & a_{13}\cdot z & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x & + & a_{22}\cdot y & + & a_{23}\cdot z & = & b_2 \\ a_{31}\cdot x & + & a_{32}\cdot y & + & a_{33}\cdot z & = & b_3 \end{array}\right.$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Résolution matricielle d'un système linéaire

Sous certaines conditions (que nous n'étudierons pas) il existe une unique matrice notée A^{-1} vérifiant :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

La matrice A^{-1} est appelée **matrice inverse** de A.

Exemple

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$ puis $B \times A$.

Qu'en concluez-vous ?

Résolution matricielle d'un système linéaire

Si A^{-1} existe alors le système linéaire $AX = B$ est équivalent à :

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_nX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Il existe alors un **triplet unique** de solutions donné par la matrice $X = A^{-1}B$.

Résolution matricielle d'un système linéaire

Exemple

Résolvons le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} x+2z=9 \\ y-3z=-4 \\ x+2y=5 \end{array}\right.$

Le système s'écrit $AX=B$ avec

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Calculer A^{-1} à la calculatrice.

Sur TI-82 :

Appuyer sur `MATRX` puis `1:[A]` puis taper `^(-1)` et valider

Sur TI-89

Saisir `A ^(-1)`

Sur Casio 35+ :

Saisir `Mat A ^(-1)`

On peut aussi calculer directement $A^{-1}\times B$ à la calculatrice.

Résolution matricielle d'un système linéaire

Exemple

$A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc le système $\begin{cases} x + 2z = 9 \\ y - 3z = -4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

a pour solutions $x = 7$, $y = -1$ et $z = 1$.

La solution du système est $(7; -1; 1)$

Feuille 2 Exercice 4