Partie A.

1. **Expliquons pourquoi 23 est un nombre premier.**
   Les seuls diviseurs positifs de 23 sont 1 et lui-même. 23 est donc premier.

2. **a. Donnons la décomposition en produit de facteurs premiers de 88.**
   $88 = 2 \times 2 \times 2 \times 11 = 2^3 \times 11.$

   b. Expliquons pourquoi 9 et 88 sont deux nombres premiers entre eux.
   $9 = \ 3^2.$
   1 est le seul diviseur commun positif. 9 et 88 sont donc premiers entre eux.

3. **Expliquons pourquoi $\mathbf{49 \times 9 \equiv 1}$ modulo 88.**
   $49 \times 9 = 441 = 5 \times 88 + 1.$
   Le reste de la division euclidienne de 441 par 88 est 1.
   Par conséquent $49 \times 9 \equiv 1$ modulo 88.

Partie B

Déterminons le nombre crypté b que Bob envoie à Alice.
$a^c \equiv b$ modulo n (avec $0 \leq b < n$). On connait a = 12, c = 9 et n = 115.
Or $12^9 \equiv 27$ modulo 115.
Bob envoie à Alice le nombre crypté 27.

Partie C.

Calculons le nombre a transmis par Bob à Alice.
On sait que $2^{49} \equiv a$ modulo 115.
Or $2^{33} \equiv 47$ modulo 115 et $2^{16} \equiv 101$ modulo 115 donc $2^{49} \equiv 47 \times 101$ modulo 115.
Or $47 \times 101 = 4747$ et $4747 \equiv 32$ modulo 115 donc $2^{49} \equiv 32$ modulo 115.
Par conséquent, le nombre transmis par Bob à Alice est le nombre 32.