

Logique

Laurent Debize



B1 RPI

Mathématiques appliquées à l'informatique

① Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

② Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

③ Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

En logique, deux objets sont rencontrés :

- Des propositions (« phrases » mathématiques)
- Des connecteurs logiques (pour manipuler ces « phrases »)

Propositions

Les expressions mathématiques sont composées :

- de **termes** (ou « mots » mathématiques) qui doivent respecter une orthographe

Les termes représentent des **objets**

Exemples :

$$-4 ; \frac{1}{6} ; x ; A$$

- d'**énoncés** (ou « phrases » mathématiques) qui doivent respecter une syntaxe (ou « grammaire »)

Les énoncés énoncent des **faits**

Exemples :

- $2 + 2 = 4$
- 8 est divisible par 3
- $y > 7$
- $-x + y = 3$ ($a = b$ qu'on lit « a égale b » signifie que a et b représentent la même entité mathématique)

PropositionsConnecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De
MorganUniversalité de
NAND et NOR

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propositions

Remarque

Certaines expressions n'ont aucun sens mathématique :

Exemples :

$$\frac{1}{0} ; + = \times ; \sqrt{-1}$$

PropositionsConnecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propositions

Valeurs de vérité

- **Logique binaire** : Vrai (V) ou Faux (F)
- « Vrai (V) » et « Faux (F) » sont appelés **valeurs de vérité**
- **Logique de Boole (logique booléenne)** : Vrai = 1 et Faux = 0

Exemples :

- « $2 + 2 = 4$ » est un énoncé vrai
- « 5 est un nombre impair » est un énoncé vrai
- « pour tout réel x , $x^2 + 1 < 0$ » est un énoncé faux

Propositions

Définition

On appelle **proposition** ou **assertion** un énoncé qu'on peut juger sans ambiguïté Vrai ou Faux.

Notation

Les propositions sont généralement notées par des lettres majuscules (A, B, etc.)

Exemples

- $2 + 2 = 4$ est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est vrai donc c'est une proposition vraie.
- « 8 est divisible par 3 » est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est faux donc c'est une proposition fausse.
- « Le professeur est sympathique », **énoncé très subjectif**, n'est pas une proposition.
- « $x + 2 = 0$ » n'est pas une proposition car **la valeur de vérité dépend du réel x**.

PropositionsConnecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exercice 1

Est-ce que les énoncés, ci-dessous, sont des propositions ?

A : « Monsieur Martin est né un 1^{er} janvier »

B : « Monsieur Martin est grand »

C : « Pour x réel, $3x + 4 = 0$ »

D : « Pour x réel, $3x^2 + 4 = 0$ »

Connecteurs logiques

A partir de propositions initiales, on peut définir de nouvelles propositions au moyen de **connecteurs logiques** comme :

- NON
- ET
- OU
- NAND
- NOR
- XOR
- l'implication
- l'équivalence

Ces transformations sont appelées des **opérations logiques**.

Ces opérations logiques peuvent aussi être définies par leurs tables opératoires appelées **tables de vérité**.

NON

Définition

Soit A une proposition.

La proposition « non A » est vraie lorsque A est fausse et vice-versa.

Notation

Cette proposition est notée \bar{A} ou non A .

$\bar{\quad}$ est le connecteur NON.

Table de vérité

A	\bar{A}
0	1
1	0

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De
Morgan

Universalité de
NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exemples

- Soit P la proposition « $4 > 3$ ».
Sa négation est la proposition \bar{P} : « $4 \leq 3$ ».
- En Python, « non » se note « not » :

```
>>> A = (2==2)
```

```
>>> A
```

```
True
```

```
>>> not(A)
```

```
False
```

ET

Définition

Soient A et B deux propositions.

La proposition « A et B » n'est vraie que si les propositions A et B sont vraies simultanément.

Notation

Cette proposition est notée $A \cdot B$.

\cdot est le connecteur ET.

Table de vérité

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques
NON
ET
OU
XOR
NAND
NOR
Equivalence
Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et
Distributivité
Lois de De
Morgan
Universalité de
NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme
Avec 2 variables
Avec 3 variables

Exemples

- La proposition « $14 - 3 = 11$ et $2 > 3$ » est fausse
- La proposition « 100 est pair et $100 = 10^2$ » est vraie
- En Python, « et » se note « and »
et « != » signifie « \neq » :

```
>>> (4==4) and (6!=6)
```

```
False
```

```
>>> (4<5) and (6<10)
```

```
True
```

Les masques de sous-réseau

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques
NON
ET
OU
XOR
NAND
NOR
Equivalence
Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et
Distributivité
Lois de De
Morgan
Universalité de
NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme
Avec 2 variables
Avec 3 variables

Convertir cette adresse IPv4 suivante en binaire : 78.42.90.217

Convertir le masque de sous-réseau suivant en binaire : 255.255.240.0

Faire un ET logique bit à bit entre l'adresse IPv4 et le masque de sous-réseau. Que reste-t-il ?

Convertir cette adresse à nouveau en base 10.

Voilà comment on récupère l'adresse du sous-réseau !

OU

Définition

Soient A et B deux propositions.

La proposition « A ou B » est vraie si au moins une de deux propositions A et B est vraie.

Notation

Cette proposition est notée $A + B$.

$+$ est le connecteur OU.

Table de vérité

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OU

Remarque

Le connecteur $+$ utilisé en logique n'est pas le OU du langage courant :

choisir « fromage ou dessert » est le plus souvent interprété comme un choix exclusif (ou l'un ou l'autre mais pas les deux).

Exemples

- La proposition « $14 - 3 = 11$ ou $2 > 3$ » est vraie
- La proposition « 100 est pair ou $100 = 10^2$ » est vraie
- En Python, « ou » se note « or »

```
>>> (2!=2) or (5<7)
```

```
True
```

```
>>> (7<3) or (6==10)
```

```
False
```

Exercice 2

On note P et Q les affirmations suivantes :

- $P = \ll \text{Paul aime le foot} \gg$
- $Q = \ll \text{Paul aime les maths} \gg$

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P , Q et des connecteurs logiques.

- $A = \ll \text{Paul aime le foot mais pas les maths} \gg$
- $B = \ll \text{Paul n'aime ni le foot ni les maths} \gg$
- $C = \ll \text{Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot} \gg$
- $D = \ll \text{Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot} \gg$

Exercice 3

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- $A = \ll \pi = 5 \text{ et } 2 + 3 = 5 \gg$
- $B = \ll \pi = 5 \text{ ou } 2 + 3 = 5 \gg$
- $C = \ll 11 > 0 \text{ et } 3 < 2 \gg$
- $D = \ll 3 > 6 \text{ ou } 6 > 20 \gg$

Définition

Soient A et B deux propositions.

La proposition « A XOR B » (A OU EXCLUSIF B) est vraie si une seule de deux propositions A ou B est vraie.

Notation

Cette proposition est notée $A \text{ xor } B$.

Table de vérité

A	B	$A \text{ xor } B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarque

C'est le connecteur utilisé dans l'expression « fromage ou dessert » (l'un ou l'autre mais pas les deux).

Exercice 4

Soient A et B deux propositions.

Compléter la table de vérité suivante :

A	B	$A \text{ xor } B$	$(A \text{ xor } B) \text{ xor } B$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A quoi est égal $(A \text{ xor } B) \text{ xor } B$?

Dégager un intérêt pour la cryptographie.

Définition

Soient A et B deux propositions.

La proposition « A NAND B » est en fait la proposition « NON (A ET B) ».

Notation

Cette proposition est notée $\overline{A \cdot B}$.

Table de vérité

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

Définition

Soient A et B deux propositions.

La proposition « A NOR B » est en fait la proposition « NON (A OU B) ».

Notation

Cette proposition est notée $\overline{A + B}$.

Table de vérité

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Equivalence

Définition

Soient A et B deux propositions.

L'équivalence des propositions A et B est la proposition « A si et seulement si B ».

Elle est vraie si les deux propositions A et B ont la même valeur de vérité.

Notation

Cette proposition est notée « $A \Leftrightarrow B$ »

\Leftrightarrow est le connecteur ...SI ET SEULEMENT SI...

Table de vérité

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Calculs
 propositionnels

 Propositions
 Connecteurs
 logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

 Propriétés des
 opérateurs
 logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

 Simplification
 d'expressions
 booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exemples

- La proposition « $2 + 3 = 5 \Leftrightarrow 5 < 6$ » est vraie
- La proposition « $8 \geq 10 \Leftrightarrow 4 = 3$ » est vraie
- La proposition « $5 + 7 = 12 \Leftrightarrow 2 = 3$ » est fausse
- En Python, l'équivalence se note aussi « `==` »

```
>>> (5<6) == (1==4)
```

```
False
```

```
>>> (6<5) == (1==4)
```

```
True
```

Implication

Définition

Soient A et B deux propositions.

L'implication des propositions A et B est la proposition « A implique B ».

Elle est vraie si les deux propositions A et B sont vraies, ou si A est fausse.

Notation

Cette proposition est notée « $A \Rightarrow B$ », « Si A alors B », « A entraîne B »

\Rightarrow est le connecteur SI... ALORS...

Table de vérité

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implication

Remarque

Les deux dernières lignes de la table de vérité de $\ll A \Rightarrow B \gg$ montrent que le sens que les mathématiques donnent aux mots « implique » et « entraîne » est plus général que le langage courant.

Exemple :

- $\ll 2 + 2 = 5 \gg \Rightarrow \ll \text{La France a gagné la coupe du monde en 1998} \gg$ **est vraie**
- $\ll \text{La France a gagné la coupe du monde en 2014} \gg \Rightarrow \ll 2 + 2 = 5 \gg$ **est vraie**

Implication

Exemples

- La proposition « $5 < 5 \Rightarrow 5 = 5$ » est vraie
- La proposition « $5 = 5 \Rightarrow 5 < 5$ » est fausse
- En Python, l'implication se note « $<=$ ».

```
>>> (3==2) <= (5<7)
```

```
True
```

```
>>> (2<4) <= (3>5)
```

```
False
```

Exercice 5

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- $A = \ll \pi \simeq 3,14 \Rightarrow 5 + 6 = 11 \gg$
- $B = \ll \pi = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5 \gg$
- $C = \ll 5 + 5 = 10 \Leftrightarrow \pi = 11 \gg$
- $D = \ll 3 < 2 \Rightarrow 5 = 5 \gg$

① Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

② Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

③ Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propriétés des opérateurs logiques

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propriétés du connecteur NON

- $\overline{\overline{V}} = V$ et $\overline{\overline{F}} = F$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs

logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

Simplification d'expressions

booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$A + B$	$(A + B) + C$	$B + C$	$A + (B + C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Que concluez-vous, en observant les 5^e et 7^e colonnes ?

Propriétés des opérateurs logiques

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques
NON
ET
OU
XOR
NAND
NOR
Equivalence
Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et
Distributivité
Lois de De
Morgan
Universalité de
NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme
Avec 2 variables
Avec 3 variables

Propriétés du connecteur OU

- idempotence : $A + A = A$
- commutativité : $A + B = B + A$
- associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$ que l'on peut donc noter $A + B + C$
- $A + F = A$ et $A + V = V$

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs

logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$A \cdot B$	$(A \cdot B) \cdot C$	$B \cdot C$	$A \cdot (B \cdot C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Que concluez-vous, en observant les 5^e et 7^e colonnes ?

Calculs
propositionnels

Propositions

Connecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De
MorganUniversalité de
NAND et NORSimplification
d'expressions
booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propriétés du connecteur ET

- idempotence : $A \cdot A = A$
- commutativité : $A \cdot B = B \cdot A$
- associativité : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ que l'on peut donc noter $A \cdot B \cdot C$
- $A \cdot F = F$ et $A \cdot V = A$

Exercice 8

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$B + C$	$A \cdot (B + C)$	$A \cdot B$	$A \cdot C$	$(A \cdot B) + (A \cdot C)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Que concluez-vous, en observant les 5^e et 8^e colonnes ?

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exercice 9

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$B \cdot C$	$A + (B \cdot C)$	$A + B$	$A + C$	$(A + B) \cdot (A + C)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Que concluez-vous, en observant les 5^e et 8^e colonnes ?

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De

Morgan

Universalité de

NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propriétés des opérateurs logiques

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Distributivité

- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- $A : \ll a > 0 \gg$
- $B : \ll a < -3 \gg$
- $C : \ll 3 < a \gg$

$A \cdot (B + C)$ est la proposition $(a > 0) \cdot (a < -3 + 3 < a)$
 c'est-à-dire $(a > 0 \cdot a < -3) + (a > 0 \cdot 3 < a)$
 soit $F + (a > 0 \cdot 3 < a)$
 donc $A \cdot (B + C) = 3 < a$

Exercice 10

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A \cdot B}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Que concluez-vous, en observant les 6^e et 7^e colonnes ?

Montrer de la même façon que $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs

logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions

booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Propriétés des opérateurs logiques

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Lois de De Morgan

- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- $A : \ll a < -3 \gg$
- $B : \ll 3 < a \gg$

$A + B$ est la proposition $(a < -3) + (3 < a)$

$\overline{A + B}$ est la proposition $\overline{(a < -3) + 3 < a)}$

c'est-à-dire $(a \geq -3) \cdot (3 \geq a)$

soit $-3 \leq a \leq 3$

Exercice 11

Universalité du NAND

- ① Déterminer la proposition $A \text{ NAND } A$. En déduire l'expression à l'aide du seul connecteur NAND la proposition \overline{A}
- ② Donner la définition de $A \text{ NAND } B$. En considérant que $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$, exprimer $A \cdot B$ à l'aide du seul connecteur NAND.
- ③ A l'aide d'une loi de De Morgan, exprimer $\overline{A + B}$. En considérant que $A + B = \overline{\overline{A + B}}$, exprimer $A + B$ à l'aide du seul connecteur NAND.
- ④ Pourquoi dit-on que le connecteur NAND est **universel** ?
- ⑤ *Facultatif* : faire de même mais avec le seul connecteur NOR.

① Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

② Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

③ Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Minterme

Définition

Un **minterme** de n variables booléennes est un produit de ces n variables ou de leurs complémentaires

Exemples

- Soient deux variables booléennes a et b , alors $a \cdot b$ et $a \cdot \bar{b}$ sont deux mintermes
- Soient trois variables booléennes a , b et c , alors $a\bar{b}c$ est un minterme, par contre $a\bar{b}$ ne l'est pas.

Forme canonique disjonctive

Calculs
propositionnels

Propositions
Connecteurs
logiques
NON
ET
OU
XOR
NAND
NOR
Equivalence
Implication

Propriétés des
opérateurs
logiques

Non, Ou, Et
Distributivité
Lois de De
Morgan
Universalité de
NAND et NOR

Simplification
d'expressions
booléennes

Minterme

Avec 2 variables
Avec 3 variables

Définition

On appelle **forme canonique disjonctive** de la fonction f son écriture sous forme de somme de mintermes (**cette décomposition est unique**).

Exemples

Soient deux variables booléennes a et b

- $f(a, b) = ab + \bar{a}\bar{b}$ est sous forme canonique disjonctive
- $g(a, b) = a + \bar{a}b$ ne l'est pas.

Sa forme canonique disjonctive est $g(a, b) = ab + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}$

Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Définition : tableau de Karnaugh

Les fonctions booléennes de 2 variables a et b sont représentées par le tableau ci-dessous appelé **tableau de Karnaugh**. Chaque case représente un produit des variables a , b ou de leur complémentaire et chacun de ces produits est appelé un **minterme**.

Pour une fonction de 2 variables ils sont au nombre de 4.

$a \backslash b$	0	1
0	$\bar{a}\bar{b}$	$\bar{a}b$
1	$a\bar{b}$	ab

Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

Pour représenter une fonction f , on met en évidence les mintermes composant f en notant 1 dans les cases pour lesquelles $f = 1$.

Exemples

- Pour $f(a, b) = ab + \bar{a}\bar{b}$, on a :

$a \backslash b$	0	1
0	1	
1		1

- Pour $g(a, b) = a + \bar{a}b$, on a :

$a \backslash b$	0	1
0		1
1	1	1

a est représenté par 2 cases adjacentes ($\bar{a}b$ et ab).

Représentation des fonctions booléennes à 2 variables

Calculs propositionnels

Propositions
 Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Remarque

Lorsque l'on passe d'une case à une autre case du tableau, et si une des variables seulement change d'état, les cases correspondantes sont dites **adjacentes**.

Par exemple, les cases correspondant aux mintermes ab et $\bar{a}b$ sont adjacentes mais les cases correspondant aux mintermes ab et $\bar{a}\bar{b}$ ne le sont pas.

$a \backslash b$	0	1
0		
1		

Cases adjacentes

$a \backslash b$	0	1
0		
1		

Cases non adjacentes

Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 2 variables

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Méthode :

Pour simplifier une expression booléenne, on remplace deux cases adjacentes par une seule variable.

Exemple :

Pour g définie par $g(a; b) = a + \bar{a}b$, on a :

$a \backslash b$	0	1
0		1
1	1	1

$$g(a; b) = a + b$$

Exercice : mot de passe

La connexion à un site Internet nécessite la saisie d'un mot de passe. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet français, ou des chiffres.

Un mot de passe est valide si l'une au moins des trois conditions suivantes est réalisée :

- Il comporte au moins trois chiffres
- Il comporte au moins cinq lettres
- Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres

Partie A - Reconnaître si un mot de passe est valide

- ① Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H3EXZK5 LUC230598 1ZRMK4

- ② Alice veut créer un mot de passe avec quatre lettres et quatre chiffres. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de huit lettres ?

Partie B - Écriture d'une expression booléenne

On définit deux variables booléennes a et b de la façon suivante :

- $a = 1$ si le mot de passe contient au moins trois chiffres, sinon $a = 0$.
- $b = 1$ si le mot de passe contient au moins cinq lettres, sinon $b = 0$.

ainsi que la variable A telle que $A = 1$ si le mot de passe est valide, $A = 0$ sinon.

- ① Traduire chacune des deux conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a , b . En déduire l'expression de A .
- ② Représenter A avec un tableau de Karnaugh. En déduire une expression simplifiée de A .
- ③ Écrire l'algorithme qui teste si un mot de passe est valide.
- ④ Pour des raisons pratiques, on préfère tester quand le mot de passe est non valide pour redemander sa saisie. Donner l'expression de \bar{A} .
- ⑤ Écrire l'algorithme qui teste si un mot de passe est non valide.

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Représentation de mintermes

Représentation de $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1			
1				

Représentation de $a\bar{b}\bar{c}$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1		1		

Calculs propositionnels

Propositions
 Connecteurs logiques
 NON
 ET
 OU
 XOR
 NAND
 NOR
 Equivalence
 Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et
 Distributivité
 Lois de De Morgan
 Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme
 Avec 2 variables
 Avec 3 variables

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Représentation d'une fonction booléenne quelconque de 3 variables

La représentation à l'aide d'un tableau de Karnaugh d'une fonction booléenne quelconque s'effectue en combinant les représentations de chaque minterme.

$$\text{Pour } f(a, b, c) = abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c}$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Représentation des produits de deux variables ou de leurs complémentaires

Représentation de ab

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1			1	1

Représentation de $\bar{b}\bar{c}$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1		
1		1		

Calculs propositionnels

Propositions
 Connecteurs logiques
 NON
 ET
 OU
 XOR
 NAND
 NOR
 Equivalence
 Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et
 Distributivité
 Lois de De Morgan
 Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme
 Avec 2 variables
 Avec 3 variables

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Représentation d'une variable

Représentation de a :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1	1	1	1	1

Représentation de \bar{b} :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

Calculs propositionnels

Propositions
 Connecteurs logiques
 NON
 ET
 OU
 XOR
 NAND
 NOR
 Equivalence
 Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et
 Distributivité
 Lois de De Morgan
 Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme
 Avec 2 variables
 Avec 3 variables

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Exercice :

Pour $g(a, b, c) = ab + \bar{a}\bar{c} + abc$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

Pour $h(a, b, c) = abc + \bar{c} + ab$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Remarque

Pour 3 variables booléennes :

- 4 cases du tableau de Karnaugh sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'une seule variable
- 2 cases sont dites adjacentes si elles peuvent s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables.

Exemples de cases adjacentes :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

Représentation des fonctions booléennes à 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exemples de cases non adjacentes :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0				
1				

Elles ne peuvent pas s'écrire à l'aide d'un produit de 2 variables ou avec 1 variable.

Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Méthode :

Pour simplifier l'écriture d'une fonction à l'aide d'un tableau de Karnaugh, on regroupe les cases adjacentes :

- par 4 et on écrit la variable correspondante
- par 2 et on écrit le produit de deux variables correspondant

Règle :

- Il faut regrouper le plus de cases adjacentes possibles à la fois (faire un « rectangle » le plus grand possible)
- Il faut que chaque case contenant un « 1 » soit au moins dans un regroupement
- Une case peut être dans plusieurs regroupements

Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exemple 1 :

Pour $f(a, b, c) = abc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc$, on a :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0			1	1
1			1	

$$f(a, b, c) = \bar{a}b + bc$$

Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions

Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Exemple 2 :

Pour $f(a, b, c) = ab + bc + \bar{a}\bar{c}$, on a :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1		1	1
1			1	1

$$f(a, b, c) = b + \bar{a}\bar{c}$$

Méthode graphique pour les fonctions booléennes à 3 variables

Calculs propositionnels

Propositions
Connecteurs logiques

NON

ET

OU

XOR

NAND

NOR

Equivalence

Implication

Propriétés des opérateurs logiques

Non, Ou, Et

Distributivité

Lois de De Morgan

Universalité de NAND et NOR

Simplification d'expressions booléennes

Minterme

Avec 2 variables

Avec 3 variables

Remarque :

L'écriture de la forme simplifiée d'une fonction booléenne obtenue à l'aide d'un tableau de Karnaugh **n'est pas unique**.

Par exemple, pour la fonction f définie par le tableau de Karnaugh suivant :

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	

$$f(a, b, c) =$$

$$f(a, b, c) =$$

Exercice : mot de passe plus complexe

La connexion à un site Internet nécessite la saisie d'un mot de passe comportant de 8 à 12 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet français, ou des chiffres, ou des caractères spéciaux (tels que &, *, /, @ etc).

Un mot de passe est valide si l'une au moins des trois conditions suivantes est réalisée :

- Il comporte au moins trois chiffres et trois caractères spéciaux
- Il comporte au moins cinq lettres
- Il comporte moins de trois chiffres mais au moins cinq lettres et trois caractères spéciaux

Partie A - Reconnaître si un mot de passe est valide

- 1 Parmi les mots de passe suivants, quels sont ceux qui sont valides ?

H32EXZ&K5= LUC230598** 123(M*K#4

- 2 Alice veut créer un mot de passe avec quatre lettres, quatre chiffres et quatre caractères spéciaux. Ce mot de passe sera-t-il accepté ? Et un mot de passe de huit lettres ?

Partie B - Écriture d'une expression booléenne

On définit trois variables booléennes a , b et c de la façon suivante :

- $a = 1$ si le mot de passe contient au moins trois chiffres, sinon $a = 0$.
- $b = 1$ si le mot de passe contient au moins cinq lettres, sinon $b = 0$.
- $c = 1$ si le mot de passe contient au moins trois caractères spéciaux, sinon $c = 0$.

ainsi que la variable A telle que $A = 1$ si le mot de passe est valide, $A = 0$ sinon.

- 1 Traduire chacune des trois conditions de validité d'un mot de passe à l'aide des variables a , b et c . En déduire l'expression de A .
- 2 Représenter A avec un tableau de Karnaugh. En déduire une expression simplifiée de A .
- 3 Écrire l'algorithme qui teste si un mot de passe est valide.
- 4 Pour des raisons pratiques, on préfère tester quand le mot de passe est non valide pour redemander sa saisie. Donner l'expression de \bar{A} .
- 5 Écrire l'algorithme qui teste si un mot de passe est non valide.