Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Théorie des graphes

Laurent Debize

TIIS1
Outils Mathématiques et Physiques

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

1 Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1

2 Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal

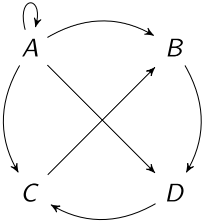
3 La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Graphes orientés

Graphe - représentation sagittale

On considère l'ensemble $S = \{A, B, C, D\}$ où A, B, C et D sont 4 points du plan.
L'ensemble
$G = \{(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)\}$, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe orienté** sur S.



Les couples de G sont représentés par des arcs orientés. Le schéma ci-dessus est la **représentation sagittale** de G (ou représentation par points et flèches).

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Vocabulaire

Définitions

Pour la représentation sagittale précédente :

- Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets**
- Les couples de G sont appelés **arcs**
- (A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C
- Le chemin (A, A) est appelé une **boucle**
- Le chemin (B, D, C, B) est un **circuit**

Prédécesseurs – successeurs

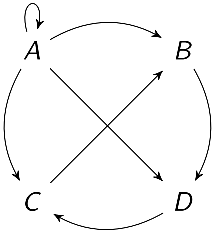
Définitions

Si (A, B) est un arc d'un graphe alors on dira que A est un **prédécesseur** de B et que B est un **successeur** de A.

L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet A est noté $\Gamma^{-}(A)$ et l'ensemble des successeurs d'un sommet A est noté $\Gamma^{+}(A)$.

Prédécesseurs – successeurs

Exemple



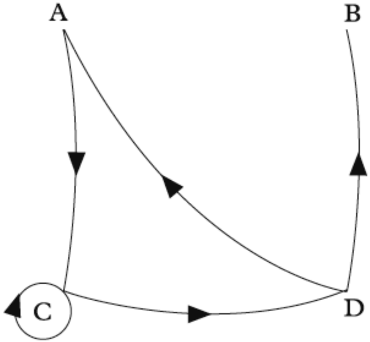
Sommets	Successeurs Γ^+	Prédécesseurs Γ^-
A	A, B, C, D	A
B	D	A,C
C	B	A,D
D	C	A,B

$$\Gamma^-(A) = \{A\} \text{ et } \Gamma^+(A) = \{A, B, C, D\}$$

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Exercice 1

On considère le graphe suivant. Déterminer l'ensemble Γ^- des prédécesseurs de A, B, C et D et l'ensemble Γ^+ de leurs successeurs.



Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1

Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal

La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

1 Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1

2 Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal

3 La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Définitions

Définition

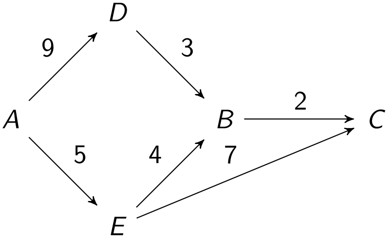
On appelle **graphe valué** un graphe dans lequel chaque arc est affecté d'une valeur.
On appelle **valeur d'un chemin** la somme des valeurs des arcs qui le composent.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Définitions

Exemple

Le graphe simple orienté et valué ci-dessous, ordonné par niveaux, indique la durée des trajets entre cinq villes A, B, C, D et E.



- Le chemin (A, D, B, C) a pour longueur 3 et pour valeur 14.
- Le chemin (A, E, C) a pour longueur 2 et pour valeur 12.
- Pour un graphe dont tous les arcs ont la valeur 1, la longueur d'un chemin et sa valeur sont identiques.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Chemin minimal – chemin maximal

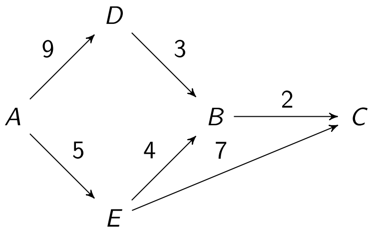
Définition

Parmi tous les chemins menant d'un sommet A à un sommet B, on appelle :

- **chemin minimal** un chemin dont la valeur est minimale
- **chemin maximal** un chemin sans circuit dont la valeur est maximale
- **chemin optimal** tout chemin minimal ou maximal

Chemin minimal – chemin maximal

Exemple



Pour aller de A à C :

- le chemin (A, D, B, C), de longueur 3 et de valeur 14, est un chemin maximal
- le chemin (A, E, B, C), de longueur 3 et de valeur 11, est un chemin minimal
- le chemin (A, E, C), de longueur 2 et de valeur 12, n'est pas un chemin optimal

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Chemin minimal – chemin maximal

Propriété

Tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

1. Graphes orientés
   - Graphes : définitions
   - Prédécesseurs – successeurs
   - Exercice 1
2. Graphes valués
   - Définitions
   - Chemin minimal – chemin maximal
3. La méthode PERT/MPM
   - Définition
   - Exemple 1
   - Niveau des sommets d'un graphe
   - Exercice 2
   - Exemple 2

La méthode PERT en deux mots

- PERT = Program Evaluation and Review Technique
- Méthode **d'ordonnancement** et **d'optimisation** pour la réalisation de projets comportant un grand nombre de tâches.
- Créée en 1958 à la demande de la marine américaine, pour son programme de missiles balistiques nucléaires miniaturisés **Polaris**
- Objectif rattraper le retard sur l'URSS (projet avec 9000 sous-traitants, 250 fournisseurs). Delai initial : 7 ans. Grâce au PERT : 4 ans
- Utile pour planifier des travaux de construction de maisons, de navires, d'avions
- Utilise les graphes orientés décrivant des **tâches** et des **étapes**
- Une méthode similaire a été inventée la même année par le Français Bernard Roy sous le nom de MPM pour « Méthode des Potentiels Metra » pour l'usine de fabrication de villebrequins Mavilor.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Définitions

On appelle **tâche** ou **étape** le déroulement dans le temps d'une opération.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Exemple 1

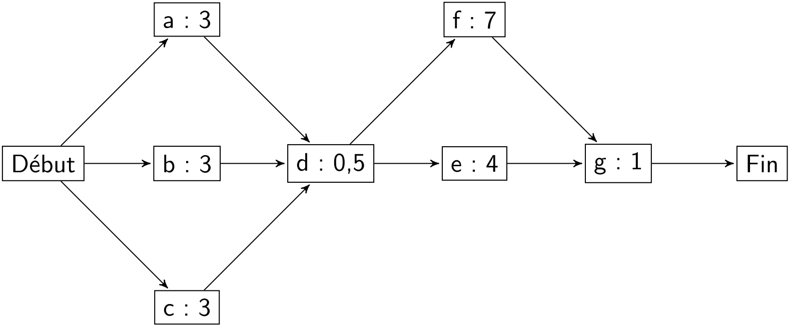
La construction de 2 immeubles doit être réalisée à partir des 2 projets choisis parmi 3 conçus simultanément. La planification des travaux nécessite les tâches ci-dessous :

- a : conception du projet 1 (durée : 3 mois)
- b : conception du projet 2 (durée : 3 mois)
- c : conception du projet 3 (durée : 3 mois)
- d : analyse et choix des 2 projets (durée : 15 jours)
- e : réalisation de l'immeuble 1 (durée : 4 mois)
- f : réalisation de l'immeuble 2 (durée : 7 mois)
- g : réception des travaux / reprise de finitions (durée : 1 mois)

La méthode MPM

Exemple 1

L'application de la méthode MPM donnera ce graphe où les nombres expriment des mois :



Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Remarques

- Une **tâche** est représentée par un rectangle dans lequel on indique le nom de la tâche et la durée de réalisation de celle-ci. Le positionnement des tâches doit respecter les niveaux du graphe.
- Les **contraintes d'antériorité** sont représentées par des flèches. Les flèches sont de durée nulle.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

Définition

On appelle **graphe simple orienté** un graphe orienté ne contenant pas de circuit (et donc pas de boucles).

Un graphe simple orienté peut être ordonné par niveaux.

Définition

On appelle **sommets de niveau 0** dans un graphe simple orienté, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur.

Si l'on note S l'ensemble des sommets du graphe et S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, on appellera **sommets de niveau 1**, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur dans l'ensemble $S \setminus S_0$ et ainsi de suite.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

Soit le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Quels sont les prédécesseurs de chaque sommet ?

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	A

Le sommet A n'a pas de prédécesseur, il est donc de niveau 0 et $S_0 = \{A\}$.

Niveaux des sommets d'un graphe

On retire tous les sommets de niveau 0 (c'est-à-dire A). Le tableau des prédécesseurs des sommets restants est :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	aucun

Les sommets D et E n'ont pas de prédécesseur dans $S \setminus S_0$, ils sont donc de niveau 1 et $S_1 = \{D, E\}$.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

On recommence en retirant tous les sommets de niveau 0 (A) et de niveau 1 (D et E) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	B

Le sommet B n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1)$, il est donc de niveau 2 et $S_2 = \{B\}$.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

Et enfin, on retire tous les sommets de niveau 0 (A), de niveau 1 (D et E) et de niveau 2 (B) :

Sommets	Prédécesseurs
C	aucun

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

On peut réunir toutes ces démarches en seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

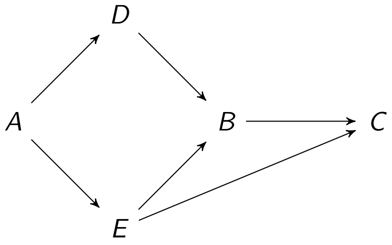
Sommets	Prédécesseurs	Niv 0	Niv 1	Niv 2	Niv 3
A	aucun	A			
B	D, E			B	
C	B, E				C
D	A		D		
E	A		E		

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S \setminus (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$, il est donc de niveau 3 et $S_3 = \{C\}$.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

Niveaux des sommets d'un graphe

On obtient donc le graphe orienté suivant, organisé par niveaux :



Exercice 2

Sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ on considère le graphe G défini par :

$$G = \{(A,B);(A,C);(A,F);(B,D);(C,D);(C,F);(D,G);(D,E);(F,E);(F,G);(G,E)\}.$$

1. Ordonner ses sommets par niveaux.
2. Donner une représentation par niveaux de G.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Exemple 2

Pour la conception et la réalisation d'un nouveau produit une entreprise estime qu'elle doit réaliser les 10 tâches a, b, c, d, e, f, g, h, j et k en tenant compte de l'ordre et des durées indiquées ci-dessous :

Tâches	Durée des tâches en jours	Tâches antérieures
a	1	-
b	2	-
c	6	d
d	3	-
e	4	a
f	1	b
g	4	f, j
h	5	g, c
j	3	a
k	6	e

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes.

Etape 1 : On ordonne les tâches par niveaux

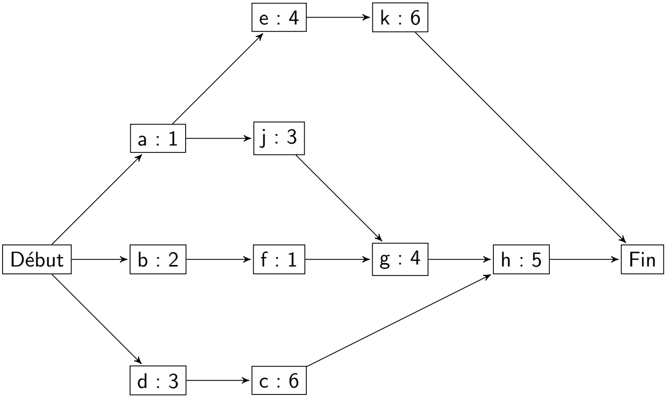
Tâches	Tâches antérieures	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
a	-	a			
b	-	b			
c	d		c		
d	-	d			
e	a		e		
f	b		f		
g	f, j			g	
h	g, c				h
j	a		j		
k	e			k	

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 2 : On représente le graphe associé

Les tâches sont classées par niveaux.



Les tâches de niveau 0 doivent provenir d'une tâche « Début » de durée nulle.

Les tâches finales doivent se rejoindre en une même tâche de durée nulle.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3 : dates au plus tôt et au plus tard

Date au plus tôt : date de début au plus tôt de la tâche.
Date au plus tard : date de début au plus tard de la tâche.
Ces dates sont indiquées sur chaque tâche.

Tâche	
Date au plus tôt	Date au plus tard

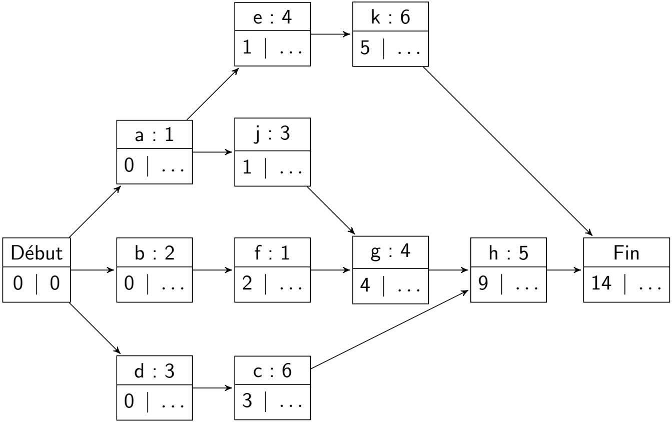
Pour la tâche « Début » ces dates sont nulles.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.1 : Date de début au plus tôt d'une tâche.

Pour chaque étape c'est la longueur du plus long chemin pour y arriver.



Le plus long chemin pour arriver à tâche g est (a, j) : $4 = 1 + 3$
Le plus long chemin pour arriver à tâche h est (d, c) : $9 = 3 + 6$
Le projet peut être réalisé en 14 jours.

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche

C'est la date au-delà de laquelle le projet ne peut avoir que du retard.

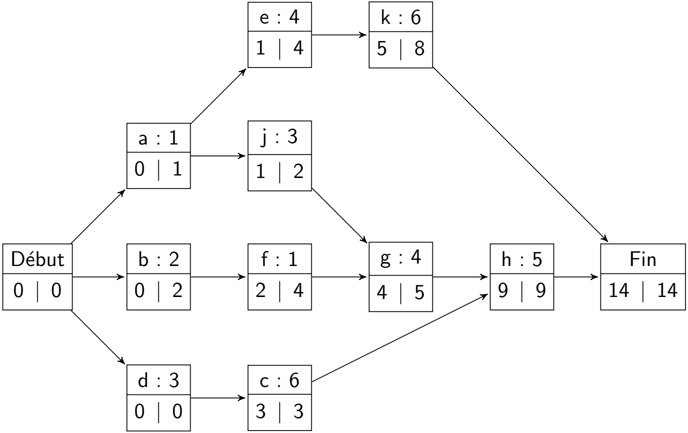
- Pour l'étape terminale la date de début au plus tard est égale à la date de début au plus tôt.
- Pour les autres étapes les dates se calculent en partant de la fin du réseau, de la manière suivante :
  Pour une tâche quelconque i, le début au plus tard est la différence :
  durée de tâche terminale – (durée du plus long chemin pour aller de la tâche i à tâche finale).

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 3.2 : Date de début au plus tard d'une tâche

On obtient ainsi le graphe :



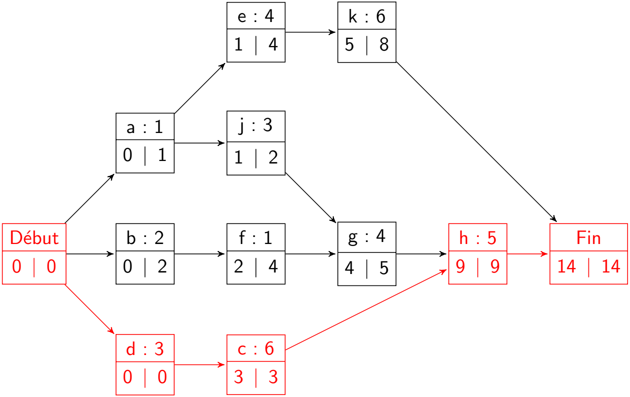
La durée du plus long chemin pour relier les tâches a et Fin est 13 : $14 - 13 = 1$

La méthode MPM

Etape 4 : détermination du chemin critique

Le **chemin critique** est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard (en rouge ci-dessous).



Le chemin critique est donc (d, c, h).

Graphes orientés
Graphes : définitions
Prédécesseurs – successeurs
Exercice 1
Graphes valués
Définitions
Chemin minimal – chemin maximal
La méthode PERT/MPM
Définition
Exemple 1
Niveau des sommets d'un graphe
Exercice 2
Exemple 2

La méthode MPM

Etape 5 : détermination des marges d'une tâche

- On appelle **marge totale** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que le **projet global** ne soit retardé.
  Marge totale = date au plus tard - date au plus tôt

  Exemple : marge totale de la tâche f : $4 - 2 = 2$ jours.
- On appelle **marge libre** d'une tâche le retard maximal que cette tâche peut prendre sans que **les tâches suivantes** ne soient retardées.
  Marge libre = plus petite des dates au plus tôt des tâches immédiatement suivantes - fin au plus tôt de la tâche considérée.
  Exemple : marge libre de la tâche f : $4 - (2 + 1) = 1$ jour.