Logique

Laurent Debize

TIIS1
Outils Mathématiques et Physiques

Calculs propositionnels

En logique, deux objets sont rencontrés :

- Des propositions (« phrases »mathématiques)
- Des connecteurs logiques (pour manipuler ces « phrases »)

Propositions

Les expressions mathématiques sont composées :

- de **termes** (ou « mots » mathématiques) qui doivent respecter une orthographe
  Les termes représentent des **objets**
  Exemples :
  $$-4\,;\ \frac{1}{6}\,;\ x\,;\ A$$
- d'**énoncés** (ou « phrases » mathématiques) qui doivent respecter une syntaxe (ou « grammaire »)
  Les énoncés énoncent des **faits**
  Exemples :
  - $2+2=4$
  - 8 est divisible par 3
  - $y>7$
  - $-x+y=3$ ($a=b$ qu'on lit « a égale b » signifie que a et b représentent la même entité mathématique)

Propositions

Remarque

Certaines expressions n'ont aucun sens mathématique :
Exemples :

$$\frac{1}{0}\ ;\ + = \times\ ;\ \sqrt{-1}$$

Propositions

Valeurs de vérité

- **Logique binaire** : Vrai (V) ou Faux (F)
- « Vrai (V) » et « Faux (F) » sont appelés **valeurs de vérité**
- **Logique de Boole (logique booléenne)** : Vrai $= 1$ et Faux $= 0$

Exemples :

- « $2 + 2 = 4$ » est un énoncé vrai
- « 5 est un nombre impair » est un énoncé vrai
- « pour tout réel x, $x^2 + 1 < 0$ » est un énoncé faux

Propositions

Définition

On appelle **proposition** ou **assertion** un énoncé qu'on peut juger sans ambiguïté Vrai ou Faux.

Notation

Les propositions sont généralement notées par des lettres majuscules (A, B, etc.)

Exemples

- $2 + 2 = 4$ est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est vrai donc c'est une proposition vraie.
- « 8 est divisible par 3 » est un énoncé qu'on peut juger, sans ambiguïté, qu'il est faux donc c'est une proposition fausse.
- « Le professeur est sympathique », **énoncé très subjectif**, n'est pas une proposition.
- « $x + 2 = 0$ » n'est pas une proposition car **la valeur de vérité dépend du réel x**.

Exercice 1

Est-ce que les énoncés, ci-dessous, sont des propositions ?

A : « Monsieur Martin est né un 1er janvier »

B : « Monsieur Martin est grand »

C : « Pour x réel, $3x + 4 = 0$ »

D : « Pour x réel, $3x^2 + 4 = 0$ »

Connecteurs logiques

A partir de propositions initiales, on peut définir de nouvelles propositions au moyen de **connecteurs logiques** comme :

- NON
- ET
- OU
- NAND
- NOR
- XOR
- l'implication
- l'équivalence

Ces transformations sont appelées des **opérations logiques**.

Ces opérations logiques peuvent aussi être définies par leurs tables opératoires appelées **tables de vérité**.

NON

Définition

Soit A une proposition.
La proposition ≪ non A ≫ est vraie lorsque A est fausse et vice-versa.

Notation

Cette proposition est notée $\overline{A}$ ou non A.
$\bar{}$ est le connecteur NON.

Table de vérité

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

NON

Exemples

- Soit P la proposition « $4 > 3$ ».
  Sa négation est la proposition $\overline{P}$: « $4 \leq 3$ ».
- En Python, « non » se note « `not` » :

```
>>> A = (2==2)
>>> A
True
>>> not(A)
False
```

ET

Définition

Soient A et B deux propositions.
La proposition « A et B » n'est vraie que si les propositions A et B sont vraies simultanément.

Notation

Cette proposition est notée $A \cdot B$.
$\cdot$ est le connecteur ET.

Table de vérité

A	B	A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ET

Exemples

- La proposition « $14 - 3 = 11$ et $2 > 3$ » est fausse
- La proposition « 100 est pair et $100 = 10^2$ » est vraie
- En Python, « et » se note « `and` » et « `!=` » signifie « $\neq$ » :

```
>>> (4==4) and (6!=6)
False
>>> (4<5) and (6<10)
True
```

Les masques de sous-réseau

Convertir cette adresse IPv4 suivante en binaire : 78.42.90.217

Convertir le masque de sous-réseau suivant en binaire : 255.255.240.0

Faire un ET logique bit à bit entre l'adresse IPv4 et le masque de sous-réseau. Que reste-t-il ?

Convertir cette adresse à nouveau en base 10.

Voilà comment on récupère l'adresse du sous-réseau !

OU

Définition

Soient A et B deux propositions.
La proposition « A ou B » est vraie si au moins une de deux propositions A et B est vraie.

Notation

Cette proposition est notée $A + B$.
$+$ est le connecteur OU.

Table de vérité

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OU

Remarque

Le connecteur $+$ utilisé en logique n'est pas le OU du langage courant :
choisir « fromage ou dessert » est le plus souvent interprété comme un choix exclusif (ou l'un ou l'autre mais pas les deux).

OU

Exemples

- La proposition « $14 - 3 = 11$ ou $2 > 3$ » est vraie
- La proposition « 100 est pair ou $100 = 10^2$ » est vraie
- En Python, « ou » se note « or »

```
>>> (2!=2) or (5<7)
True
>>> (7<3) or (6==10)
False
```

Exercice 2

On note P et Q les affirmations suivantes :

- P = « Paul aime le foot »
- Q = « Paul aime les maths »

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique en utilisant P, Q et des connecteurs logiques.

- A = « Paul aime le foot mais pas les maths »
- B = « Paul n'aime ni le foot ni les maths »
- C = « Paul aime le foot ou il aime les maths et pas le foot »
- D = « Paul aime les maths et le foot ou il aime les maths mais pas le foot »

Exercice 3

Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

- A = « $\pi = 5$ et $2 + 3 = 5$ »
- B = « $\pi = 5$ ou $2 + 3 = 5$ »
- C = « $11 > 0$ et $3 < 2$ »
- D = « $3 > 6$ ou $6 > 20$ »

XOR

Définition

Soient A et B deux propositions.
La proposition ≪ A XOR B ≫ (A OU EXCLUSIF B) est vraie si une seule de deux propositions A ou B est vraie.

Notation

Cette proposition est notée A xor B.

Table de vérité

A	B	A *xor* B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarque

C'est le connecteur utilisé dans l'expression ≪ fromage ou dessert ≫ (l'un ou l'autre mais pas les deux).

Exercice 4

Soient A et B deux propositions.
Compléter la table de vérité suivante :

A	B	A xor B	$(A$ xor $B)$ xor B
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A quoi est égal $(A$ xor $B)$ xor B ?

Dégager un intérêt pour la cryptographie.

NAND

Définition

Soient A et B deux propositions.
La proposition « A NAND B » est en fait la proposition « NON (A ET B) ».

Notation

Cette proposition est notée $\overline{A \cdot B}$.

Table de vérité

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

Définition

Soient A et B deux propositions.
La proposition « A NOR B » est en fait la proposition « NON (A OU B) ».

Notation

Cette proposition est notée $\overline{A+B}$.

Table de vérité

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Propriétés des opérateurs logiques

Propriétés du connecteur NON

- $\overline{V} = F$ et $\overline{F} = V$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Exercice 5

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$A+B$	$(A+B)+C$	$B+C$	$A+(B+C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Que concluez-vous, en observant les 5e et 7e colonnes ?

Propriétés des opérateurs logiques

Propriétés du connecteur OU

- idempotence : $A + A = A$
- commutativité : $A + B = B + A$
- associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$ que l'on peut donc noter $A + B + C$
- $A + F = A$ et $A + V = V$

Exercice 6

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$A \cdot B$	$(A \cdot B) \cdot C$	$B \cdot C$	$A \cdot (B \cdot C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Que concluez-vous, en observant les 5^e et 7^e colonnes ?

Propriétés des opérateurs logiques

Propriétés du connecteur ET

- idempotence : $A \cdot A = A$
- commutativité : $A \cdot B = B \cdot A$
- associativité : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ que l'on peut donc noter $A \cdot B \cdot C$
- $A \cdot F = F$ et $A \cdot V = A$

Exercice 7

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$B+C$	$A\cdot(B+C)$	$A\cdot B$	$A\cdot C$	$(A\cdot B)+(A\cdot C)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Que concluez-vous, en observant les 5^{e} et 8^{e} colonnes ?

Exercice 8

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$B \cdot C$	$A + (B \cdot C)$	$A + B$	$A + C$	$(A + B) \cdot (A + C)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Que concluez-vous, en observant les 5^{e} et 8^{e} colonnes ?

Propriétés des opérateurs logiques

Distributivité

- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- A : « $a > 0$ »
- B : « $a < -3$ »
- C : « $3 < a$ »

$A \cdot (B + C)$ est la proposition $(a > 0) \cdot (a < -3 + 3 < a)$

c'est-à-dire $(a > 0 \cdot a < -3) + (a > 0 \cdot 3 < a)$

soit $F + (a > 0 \cdot 3 < a)$

donc $A \cdot (B + C) = 3 < a$

Exercice 9

Complétez la table de vérité ci-dessous :

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\cdot\overline{B}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Que concluez-vous, en observant les 6e et 7e colonnes ?

Montrer de la même façon que $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

Propriétés des opérateurs logiques

Lois de De Morgan

- $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

Exemple

Soit a un réel. Soient les propositions :

- A : « $a < -3$ »
- B : « $3 < a$ »

$A + B$ est la proposition $(a < -3) + (3 < a)$

$\overline{A+B}$ est la proposition $\overline{(a < -3) + 3 < a)}$

c'est-à-dire $(a \geq -3) \cdot (3 \geq a)$

soit $-3 \leq a \leq 3$

Exercice 10

Universalité du NAND

1. Déterminer la proposition A NAND A. En déduire l'expression à l'aide du seul connecteur NAND la propostion $\overline{A}$
2. Donner la définition de A NAND B. En considérant que $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$, exprimer $A \cdot B$ à l'aide du seul connecteur NAND.
3. A l'aide d'une loi de De Morgan, exprimer $\overline{A + B}$. En considérant que $A + B = \overline{\overline{A + B}}$, exprimer $A \cdot B$ à l'aide du seul connecteur NAND.
4. Pourquoi dit-on que le connecteur NAND est **universel** ?
5. *Facultatif :* faire de même mais avec le seul connecteur NOR.