Le binaire et l'hexadécimal

Laurent Debize

TIIS 1

Mathématiques appliquées à l'informatique

Généralités

Comment dénombrer un troupeau ?

- Sur ses doigts…
- Un bâton par tête…
- Entailles sur un os
- I, II, III, IV, V, VI, VII…

Origine de notre notation 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 :

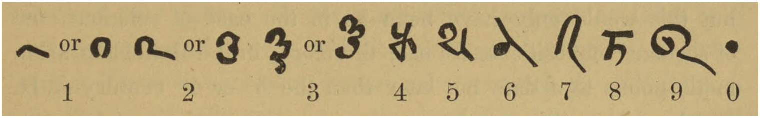
- Apparition en Inde au VIème siècle
- Arrivée en Europe par le moyen-orient au Xème siècle
- Leonardo Fibonacci propage ces notions (début XIIIème)

Avantages ?

- Numérotation de position

Généralités

Nombres utilisés dans le manuscrit de Bakhshali. Il est daté entre le IIe siècle avant n.è. et le IIe siècle de n.è. :



Numération de position, système décimal

La façon que nous avons d'écrire les nombres (la numération) est une numération de position.

- Elle utilise les 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (d'où l'appellation « système décimal »).
- Suivant leur position dans le nombre, les chiffres n'ont pas le même poids :

Par exemple, dans le nombre 789 : 9 est le chiffre des unités, 8 celui des dizaines, et 7 celui des centaines.
$789 = 7$ centaines $+ 8$ dizaines $+ 9$ unités

$$789 = 7 \times 100 + 8 \times 10 + 9 \times 1$$

ou, en utilisant les puissances de 10 :

$$789 = 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Numération de position, système décimal

Définition

En arithmétique, la **base** désigne la valeur dont les puissances successives interviennent dans le calcul des nombres.

Dans l'exemple précédent :

$$789 = 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

La base était 10.

Retenons :

L'écriture que nous utilisons habituellement est appelée **écriture en base 10** ou **écriture décimale**.

D'autres systèmes de numération de position

Système binaire

- C'est la numération utilisée dans les ordinateurs.
- Deux symboles uniquement : 0 et 1.
- Chaque chiffre s'appelle un **bit**
- Un groupement de 8 bits s'appelle un **octet** (Byte en anglais)
- Les nombres ne s'écrivent qu'avec des 0 et des 1
- 1 Mb $\neq$ 1MB

Conversion binaire → décimal

- Exemple : $N = (11011)_2$

Chiffres du nombre en binaire	1	1	0	1	1
Poids	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

- Calculs :

$$\begin{aligned} N &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 \\ &= 27 \end{aligned}$$

- Donc $N = (11011)_2 = (27)_{10}$

Exercice 1

Convertir les nombres suivants :

$(11)_2 =$

$(110)_2 =$

$(101010)_2 =$

Moralité

Le monde se divise en 10 catégories :

- Ceux qui comprennent le binaire
- Et ceux qui ne le comprennent pas

Conversion décimal $\rightarrow$ binaire

Il existe deux méthodes :

- Méthode intuitive
- Méthode algorithmique

Méthode intuitive

Prenons $n = (90)_{10}$
Utilisons un tableau contenant les puissances de 2 :

128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	0	1	1	0	1	0

La plus grande puissance de 2 inférieure à 90 est 64.
Il reste 90-64 = 26.
La plus grande puissance de 2 inférieure à 26 est 16.
Il reste 26-16 = 10.
La plus grande puissance de 2 inférieure à 10 est 8.
Il reste 10-8 = 2.
La plus grande puissance de 2 inférieure à 2 est 2.
Il reste 2-2 = 0. Terminé !

Donc $(90)_{10} = (1011010)_2$

Méthode algorithmique

Comment faisait-on des divisions à l'école primaire ?

Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 694 & 10 \\ \cline{2-2} 4 & 69 \end{array}$$

Dans cette écriture : 694 s'appelle le **dividende** ; 10 est le **diviseur** ; 69 est le **quotient** et 4 est le **reste**.

On peut établir sans difficulté les deux propriétés suivantes :

$694 = 10 \times 69 + 4$ et $0 \leq 4 < 10$

$dividende = diviseur \times quotient + reste$ et $0 \leq reste < diviseur$

Ce type de division s'appelle une **division euclidienne**.

Le mot « euclidienne » vient du nom du mathématicien grec de l'Antiquité : Euclide.

Notez bien que dans ce type de division :

- n'interviennent que des nombres entiers (et jamais de décimaux) ;
- il est indispensable de bien avoir la relation : $0 \leq reste < diviseur$

Méthode algorithmique

Répétons l'opération sur le quotient jusqu'à trouver un quotient strictement inférieur à 10.

$$
\begin{array}{l|l|l}
694 & 10 & \\
\cline{2-3}
4 & 69 & 10 \\
\cline{3-3}
 & 9 & 6 \\
 & &
\end{array}
$$

Lire le dernier quotient et les restes du bas vers le haut : 6 9 4

Méthode algorithmique

Le principe est le même pour convertir en base 2, sauf qu'il faut faire des divisions successives par 2 au lieu de 10.

90 | 2

2

Exercice 2

Convertir les nombres suivants en binaire (utilisez une méthode différente pour chaque calcul) :

$(72)_{10} =$

$(578)_{10} =$

D'autres systèmes de numération de position

Système binaire

- Exemple : 100110010 ; 1101101 ; etc.
- Le nombre 42 (écriture décimale) va s'écrire : 101010 en binaire
- Conséquence : écriture plus longue

D'autres systèmes de numération de position

Système hexadécimal

- Ecriture binaire trop longue ⇒ comment la réduire ?
- Utilisation de la base 16
- Il faut 16 symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- où A=10, B=11, . . . , F=15
- C'est le système utilisé pour écrire l'adresse et le contenu des mémoires
- On l'utilise aussi pour coder les couleurs

Conversion binaire $\leftrightarrow$ hexadécimal

- Deux écritures très liées
- En effet, $16 = 2^4$
- Correspondance entre écriture hexadécimale et écriture binaire :

Hexadécimal	Binaire	Hexadécimal	Binaire
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

Conversion binaire $\leftrightarrow$ hexadécimal

Conversion hexadécimal $\rightarrow$ binaire :

Remplacer le symbole hexadécimal par son équivalent binaire d'après le tableau précédent

Exemple

$$(5D3)_{16} = (0101\,1101\,0011)_2$$

Pour donner l'écriture binaire, le premier zéro n'est pas nécessaire, on écrira donc :

$$(5D3)_{16} = (101\,1101\,0011)_2$$

Conversion binaire $\leftrightarrow$ hexadécimal

Conversion binaire $\rightarrow$ hexadécimal :

- Découper l'écriture binaire en « paquets » de 4 chiffres en partant de la droite
- Remplacer chaque paquet par le symbole hexadécimal correspondant

Exemple

$$\begin{array}{rcccccc} (010111001110101)_2 & = & 010 & 1110 & 0111 & 0101 \\ & = & 0010 & 1110 & 0111 & 0101 \\ & = & 2 & E & 7 & 5 \\ & = & (2E75)_{16} & & & \end{array}$$

Exercice 3

Convertir en hexadécimal :
$(1101011)_2 =$

$(10000)_2 =$

convertir en binaire :
$(3E9)_{16} =$

Conversion hexadécimal → décimal

- Même principe mais en base 16
- Rappel de la valeur des symboles

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

- Exemple : écrire la valeur décimale de $N = (4A7E)_{16}$

Symboles en base 16	4	A	7	E
poids	16^3	16^2	16^1	16^0

- Calculs :

$$\begin{aligned} N &= 4 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\ &= 16384 + 2560 + 112 + 14 \\ &= 19070 \end{aligned}$$

- Donc $N = (4A7E)_{16} = (19070)_{10}$

Exercice 4

Convertir en décimal :
$(B7D)_{16} =$

Conversion décimal → hexadécimal

Même principe, mais en faisant des divisions successives par 16. On s'arrête quand le quotient est strictement inférieur à 16

$$\begin{array}{r|ll} 847 & 16 & \\ \cline{2-2} 15 & 52 & \multicolumn{1}{|l}{16} \\ \cline{3-3} & 4 & \multicolumn{1}{|l}{3} \end{array}$$

$(847)_{10} = (34F)_{16}$

On vérifie ?

$(34F)_{16} = 3 \times 16^2 + 4 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 768 + 64 + 15 = 847$

Exercice 5

Convertir en hexadécimal :

$(6348)_{10} =$

$(255)_{10} =$

$(32)_{10} =$

Addition

Table d'addition en base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Calculer $1101 + 110$

Retenues		1			
		1	1	0	1
	+		1	1	0
	1	0	0	1	1

Exercice 6

calculer :

$(1011)_2 + (11001)_2 =$

$(1111\,1111)_2 + (1)_2 =$

Dépassement d'entier (overflow)

Imaginons que notre processeur fait ses calculs sur 8 bits.
Le résultat de l'opération $(1111\,1111)_2 + (1)_2$ pourra-t-il être contenu ?