Ensembles

Laurent Debize

TIIS1
Outils Mathématiques pour l'informatique

Langage ensembliste

Définition

On appelle **ensemble**, toute collection d'objets, ceux-ci étant appelés **éléments** de l'ensemble.

Exemples

- L'ensemble des entiers naturels impairs
- L'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers)
- L'ensemble des élèves d'une classe

Langage ensembliste

Notation

Un ensemble est noté entre accolades. Exemple : $E = \{0\,;\,1\,;\,2\}$
On note $x \in E$(lire x appartient à E) pour signifier que l'élément x appartient à l'ensemble E.
On note $x \notin E$(lire x n'appartient pas à E) pour signifier que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble E.

Remarques

- Chaque élément ne figure qu'une seule fois et l'ordre dans lequel ces éléments sont écrits n'a pas d'importance.
- On appelle **ensemble vide** et on note $\varnothing$ tout ensemble qui ne contient aucun élément.

Deux façons de définir un ensemble

En extension

Définir un ensemble **en extension** signifie donner tous les éléments de cet ensemble.
Exemple : $E = \{0\,;\,2\,;\,4\,;\,5\,;\,12\}$

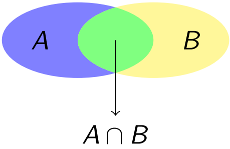
En compréhension

Définir un ensemble **en compréhension** signifie exprimer les éléments de cet ensemble à l'aide d'une proposition.
Exemple : $F = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 10\}$
Le symbole $|$ se lit « tel que »
L'ensemble F se lit « l'ensemble des x dans $\mathbb{N}$ tels que $x \leq 10$ »
En extension, l'ensemble F s'écrit :
$F = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\}$

Intersection

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
L'intersection des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.
Remarque :
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**

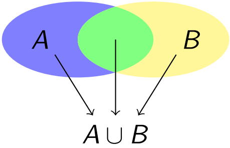


Cette représentation graphique s'appelle un **diagramme de Venn.**
On peut définir $A \cap B$ de la manière suivante (écriture axiomatique) :
$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$
Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **et** à B »

Réunion

Définition

Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
La **réunion** des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Écriture axiomatique :
$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Lire « ensemble des éléments x de E qui appartiennent à A **ou** à B »

Remarque

Le mot « ou » ici signifie « ou l'un ou l'autre ou les deux » :
$A \cup B$ contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.

Réunion

Exemples

Soient A et B les deux ensembles de nombres suivants :
$A = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\}$ et
$B = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\}$

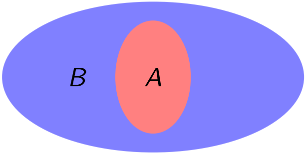
$A \cap B = \{2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\}$ (éléments communs à A et à B)
$A \cup B = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,13\,;\,17\}$
Cet ensemble contient tous les éléments de A et tous les éléments de B (on n'écrit qu'une seule fois le même élément).

Inclusion

Définition

On dit que l'ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B pour indiquer que tous les éléments de A appartiennent aussi à B.
On note $A \subset B$.

On a toujours, pour n'importe quel ensemble A : $A \subset A$ et $\varnothing \subset A$



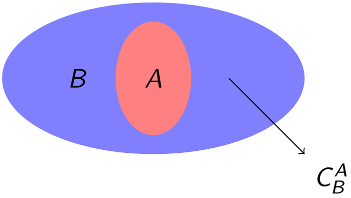
On dit aussi que A est une partie de B ou bien que A est un **sous-ensemble** de B.
Pour dire que A n'est pas inclus dans B, on emploiera la notation : $A \not\subset B$.

Complémentaire

Définition

Supposons que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. On appelle le complémentaire de A dans B et on note C_B^A ou $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit :

$$x \in C_B^A \Leftrightarrow x \in B \text{ et } x \notin A$$



Remarque

On dit que B constitue le référentiel (l'ensemble auquel on se réfère pour prendre le complémentaire).

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Définition

On appelle **partie** d'un ensemble E ou **sous-ensemble** de E, tout ensemble inclus dans E. Une partie de E est donc un ensemble constitué avec des éléments de E.

On appelle **cardinal** d'un ensemble et on note : $card(E)$ le nombre de ses éléments.

Exemple

Soit E l'ensemble de lettres suivant :
$E = \{a, b, c, d\}$
On a $card(E) = 4$ (E contient 4 éléments)

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

Parties de $E = \{a, b, c, d\}$:

- L'ensemble E lui-même constitue une partie de E : on l'appelle la **partie pleine** de E
- L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de E : on l'appelle la **partie vide** de E
- Une partie ne contenant qu'un seul élément est appelée un **singleton**
  Les parties à un élément s'écrivent : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{d\}$: il y en a quatre
- Parties à deux éléments : $\{a, b\}\{a, c\}\{a, d\}\{b, c\}\{b, d\}\{c, d\}$
- Parties à trois éléments : $\{a, b, c\}\{a, b, d\}\{a, c, d\}\{b, c, d\}$

Notions de cardinal et parties d'un ensemble

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Dans notre cas :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a,b\}; \{a,c\}; \{a,d\}; \{b,c\}; \{b,d\}; \{c,d\}; \\ \{a,b,c\}; \{a,b,d\}; \{a,c,d\}; \{b,c,d\}; \{a,b,c,d\} \end{array} \right\}$$

Pour déterminer les parties d'un ensemble on peut réaliser un arbre. On constate, sur cet exemple, que E contient 16 éléments. Nous pouvons donc écrire que $card(\mathcal{P}(E)) = 16$

Propriété

Si n désigne le cardinal de E, alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Exercice 1

Une usine fabrique des pièces de types : Type A et type B. Ces pièces sont soit métalliques, soit en céramique.
On appelle E l'ensemble des pièces qui constitue un stock. On donne : $card(E) = 10000$. On appelle respectivement : A, B, M, C les ensembles des pièces de type A, de type B, Métalliques, en Céramique.
On note par exemple $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
40 % des pièces sont en céramique. 30 % des pièces en céramique sont de type A. Dans les pièces de type B, il y a autant de pièces métalliques que de pièces en céramique.

1. Compléter :

	Type A	Type B	Total
Métalliques M			
Céramiques C			
Total			10000

2. Calculer les cardinaux des ensembles suivants : $A \cap M$; $A \cup M$.
3. Définir en compréhension les ensembles : $M \cap \overline{B}$ et $\overline{C} \cup A$.
4. En définissant les deux ensembles $\overline{B \cap M}$ et $\overline{B} \cup \overline{M}$ en compréhension, montrer qu'ils contiennent les mêmes éléments. Quel est le cardinal de ces ensembles ?

Les ensembles en informatique

Les ensembles en informatique sont **indexés** (numérotés).

Le tableau (array)

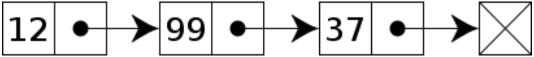
Valeur	**45**	**154**	**58**	**78**	**31**	**5**	**74**
Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

- Accès immédiat à n'importe quel élément du tableau par l'index : t[i] nous donne la valeur de la case numéro i.
- Taille fixe allouée à sa déclaration : impossibilité de supprimer ou rajouter des cases

Les ensembles en informatique

La liste (list)

La liste est définie comme ayant une tête (une valeur), et une queue (un pointeur vers une autre tête).
La tête peut être vide (fin de la liste).



- Pour accéder au n-ième élément de la liste, il faut parcourir n éléments à partir du début de la liste.
- La taille de la liste peut être modifiée en insérant un élément à n'importe quel endroit de la liste.

Les ensembles en informatique

La file ou FIFO (First In, First Out)

Comparable à la file d'attente, la file est une liste où le premier élément inséré est également le premier retiré.

La pile ou LIFO (Last In, First Out)

Comparable à la pile d'assiettes, la pile est une liste où le dernier élément inséré est le premier retiré.

1 Langage ensembliste
- Définitions
- Intersection
- Réunion
- Inclusion
- Complémentaire
- Cardinal et parties
- Les ensembles en informatique

2 Théorie des ensembles
- Définitions
- Relations binaires sur un ensemble
- Propriétés

Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Soient deux ensembles A et B. On appelle produit cartésien de A et B, et l'on note $A \times B$ (lire $\ll$ A croix B), l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$, soit encore :

$$A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \land y \in B\}$$

Exemple

Si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$,
alors $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Produit cartésien de deux ensembles

Remarques

- Les éléments de $A \times B$ sont des couples : $(x, y) \neq (y, x)$ et non des paires : $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $A \times B \neq B \times A$
- On note $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$, $A \times A \times \ldots \times A = A^n$ (ici A est présent n fois), ensembles formés respectivement de couples, de triplets, de n-uplets.

Exercice 2

Dans le référentiel $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les sous-ensembles : $A = \{1, 4\}$; $B = \{1, 3, 5\}$.
Déterminer en extension les ensembles produits $A \times B$ et $B \times A$.

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Si A et B sont deux **ensembles finis disjoints**, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \varnothing$, alors :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

Si (A_i) est une suite finie d'ensembles finis **deux à deux disjoints**, c'est-à-dire pour lesquels $A_i \cap A_j = \varnothing$ (pour tous indices $i \neq j$), alors :

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_n)$$

Remarque

La somme $card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_n)$ est notée $\sum_{i=1}^{n} card(A_i)$

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Soit Ω un ensemble. Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, alors :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

Propriétés des cardinaux d'ensembles

Propriété

Si A et B sont deux ensembles finis tels que $A \subset B$ alors

$$card(A) \leq card(B)$$

Propriété

Soient Ω un référentiel et A un sous-ensemble de Ω, alors :

$$card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$$

Propriété

Si A et B sont des ensembles finis, alors :

$$card(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

Et pour n entier naturel : $card(A^n) = card(A)^n$

Exercice 3

Dans une classe, 18 élèves font de l'anglais, 10 de l'espagnol et 7 font les deux langues.
Combien d'élèves sont dans la classe, si tous font au moins une langue ?

Exercice 4

On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :
i, j, k, S (entiers)
Début
   S <- 0
   Pour i de 1 à 3 Faire
      Pour j de 1 à 50 Faire
         Pour k de 1 à 12 Faire
            S <- S+1
         FinPour
      FinPour
   FinPour
   Afficher S
Fin
```

Quelle valeur affiche l'algorithme ?
Ecrire S comme le cardinal d'un produit d'ensembles à préciser.

Relation binaire

Définition

Soit E un ensemble. On appelle **relation** $\mathcal{R}$ sur E, tout partie de E^2. L'élément (x, y) de E est alors noté : $x\mathcal{R}y$.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}$, l'inégalité est une relation. $x\mathcal{R}y$ est défini par : $x \leqslant y$
- Dans $\mathbb{N}$, la congruence modulo n est une relation. $x\mathcal{R}y$ est défini par : $x = y$

Relation d'ordre

Définition

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si :

- la relation est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- la relation est **transitive** : $\forall (x,y,z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- la relation est **anti-symétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \Rightarrow x = y$

On dit que la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est **totale** si tous les éléments de E sont comparables entre eux :

$$\forall (x,y) \in E^2, [x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x]$$

Dans le cas contraire, on dit que la relation d'ordre est **partielle**.

Relation d'ordre

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre
Cette relation d'ordre est totale.

Ensembles ordonnés

Les relations d'ordres totales permettent de définir des ensembles ordonnés de données :

- Les tableaux triés
- Les listes triées

Relation d'équivalence

Définition

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si :

- la relation est **réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- la relation est **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3, [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Rightarrow x\mathcal{R}z$
- la relation est **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

Relation d'équivalence

Exemple

- Dans $\mathbb{N}$, la relation d'égalité :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 5

Pour les différentes relations $\mathcal{R}$ ci-dessous, déterminer si $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive, symétrique ou anti-symétrique. En déduire quelles relations sont des relations d'ordre ou d'équivalence. Déterminer ensuite si ce sont des relations totales ou partielles.

- Dans $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$
- Dans $\mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ est un diviseur de y
- Dans $\mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est un multiple de 2
- Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments. Dans $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$
- Sur $\mathbb{R}^2$ la relation définie par

$$(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leqslant y' \end{cases}$$

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Les propriétés des opérations $\cup$, $\cap$ et $\overline{A}$ définies sur $\mathcal{P}(E)$ correspondent aux propriétés des opérations logiques $\vee$, $\wedge$ et $\neg$. Ces propriétés sont donc identiques.
Elles peuvent être aisément représentées à l'aide de diagrammes de Venn.

Propriété de l'inclusion

- Pour tout ensemble A, $A \subset A$ (réflexivité)
- Si A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transivité)
- Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$ (antisymétrie)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Propriété du complémentaire

- Si Ω est le référentiel, alors $\overline{\Omega} = \varnothing$ et $\overline{\varnothing} = \Omega$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Propriété de la réunion

- Idempotence : $A \cup A = A$
- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$
- Associativité : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ que l'on peut noter $A \cup B \cup C$
- Si A et B sont inclus dans C, alors $A \cup B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$

- Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$
- $A \cup \varnothing = A$ et $A \cup \Omega = \Omega$ (Ω étant le référentiel)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Propriété de l'intersection

- Idempotence : $A \cap A = A$
- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$
- Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ que l'on peut noter $A \cap B \cap C$
- Si A et B sont inclus dans C, alors $A \cap B$ est inclus dans C :

$$(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \cap B \subset C$$

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$ et $A \cap \Omega = A$ (Ω étant le référentiel)

Propriétés des opérations définies sur les ensembles

Distributivité

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lois de De Morgan

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$