

# L'algèbre matricielle

Laurent Debize



B1 RPI

Outils Mathématiques pour l'informatique

## ① Exemple préliminaire

## ② Définitions

## ③ Addition – Produit par un réel

## ④ Produit des matrices – Puissance d'une matrice

Préliminaire – « Le produit 1 ligne par 1 colonne »

Produit des matrices

## Exemple préliminaire

Trois élèves A, B et C ont obtenu sur 2 semestres et dans 4 matières les résultats ci-dessous :

1 <sup>er</sup> semestre	Français	Anglais	Maths	SVT
Élève A	8	11	18	11
Élève B	15	11	10	10
Élève C	9	12	11	8

2 <sup>e</sup> semestre	Français	Anglais	Maths	SVT
Élève A	8	13	16	15
Élève B	19	15	6	8
Élève C	9	10	11	10

On peut résumer ces valeurs dans deux tableaux  $S_1$  et  $S_2$  que l'on appellera **matrices** :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 18 & 11 \\ 15 & 11 & 10 & 10 \\ 9 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } S_2 = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 16 & 15 \\ 19 & 15 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

## Total annuel

Pour obtenir le total annuel des points obtenus par chaque élève on ajoute les résultats de chaque semestre :

Points sur l'année	Français	Anglais	Maths	SVT
Élève A	16	24	34	26
Élève B	34	26	16	18
Élève C	18	22	22	18

On peut écrire le total annuel des points dans le tableau  $S$  :

$$S = \begin{pmatrix} 16 & 24 & 34 & 26 \\ 34 & 26 & 16 & 18 \\ 18 & 22 & 22 & 18 \end{pmatrix}$$

On dit que  $S$  est la **matrice somme** des matrices  $S_1$  et  $S_2$ .

On note  $S = S_1 + S_2$  et l'on a :

$$S = \begin{pmatrix} 16 & 24 & 34 & 26 \\ 34 & 26 & 16 & 18 \\ 18 & 22 & 22 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 18 & 11 \\ 15 & 11 & 10 & 10 \\ 9 & 12 & 11 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 13 & 16 & 15 \\ 19 & 15 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

## Moyenne annuelle

Pour obtenir la moyenne annuelle obtenue par chaque élève on divise par 2 la somme annuelle :

Moyenne annuelle	Français	Anglais	Maths	SVT
Élève A	8	12	17	13
Élève B	17	13	8	9
Élève C	9	11	11	9

On peut écrire la moyenne annuelle dans le tableau  $M$ .

On note  $M = \frac{1}{2} \cdot S$  et l'on a :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 17 & 13 \\ 17 & 13 & 8 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 24 & 34 & 26 \\ 34 & 26 & 16 & 18 \\ 18 & 22 & 22 & 18 \end{pmatrix}$$

# Coefficients

Les élèves peuvent s'orienter dans 2 filières d'étude distinctes. Pour définir leur meilleur profil on étudie leurs résultats suivant les coefficients retenus dans chacune des filières. Ces coefficients sont répartis par matières de la façon suivante :

	Filière 1	Filière 2
Français	2	4
Anglais	3	4
Maths	7	5
SVT	3	2

Les coefficients sont indiqués dans la matrice  $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

On a donc les deux tableaux suivants :

	Filière 1	Filière 2
Français	2	4
Anglais	3	4
Maths	7	5
SVT	3	2

Moyenne annuelle	Français	Anglais	Maths	SVT
Élève A	8	12	17	13
Élève B	17	13	8	9
Élève C	9	11	11	9

Quelle est la moyenne générale de chaque élève en fonction de chaque filière ?

Moyenne générale	Filière 1	Filière 2
Élève A	$8 \times 2 + 12 \times 3 + 17 \times 7 + 13 \times 3 = 210$	$8 \times 4 + 12 \times 4 + 17 \times 5 + 13 \times 2 = 191$
Élève B	$17 \times 2 + 13 \times 3 + 8 \times 7 + 9 \times 3 = 156$	$17 \times 4 + 13 \times 4 + 8 \times 5 + 9 \times 2 = 178$
Élève C	$9 \times 2 + 11 \times 3 + 11 \times 7 + 9 \times 3 = 155$	$9 \times 4 + 11 \times 4 + 11 \times 5 + 9 \times 2 = 153$

# Coefficients

Le total des points suivant les filières est indiqué dans le tableau  $P$  ci-dessous :

$$P = \begin{pmatrix} 210 & 191 \\ 156 & 178 \\ 155 & 153 \end{pmatrix}$$

On dit que la matrice  $P$  est le **produit** de la matrice  $M$  par la matrice  $C$ .

On note  $P = M \times C$  et l'on a :

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 17 & 13 \\ 17 & 13 & 8 & 9 \\ 9 & 11 & 11 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 & 191 \\ 156 & 178 \\ 155 & 153 \end{pmatrix}$$



## 1 Exemple préliminaire

## 2 Définitions

## 3 Addition – Produit par un réel

## 4 Produit des matrices – Puissance d'une matrice

Préliminaire – « Le produit 1 ligne par 1 colonne »  
Produit des matrices

# Définitions

## Définition

On appelle **matrice réelle de dimension**  $n \times p$  tout tableau rectangulaire de nombres réels comportant  $n$  lignes et  $p$  colonnes. Les matrices à  $n$  lignes et  $n$  colonnes sont appelées **matrices carrées d'ordre**  $n$ .

## Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  est une matrice  $2 \times 3$  (lire « matrice 2, 3 »).
- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée d'ordre 2.
- $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$  est une matrice  $3 \times 1$  appelée **matrice colonne**.
- $D = (5 \ 8 \ 0 \ -1)$  est une matrice  $1 \times 4$  appelée **matrice ligne**.

## Remarque

Une matrice  $A$  de dimension  $n \times p$  est encore notée  $(a_{ij})$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$

où  $a_{ij}$  désigne le terme de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ .

On peut ainsi noter la matrice  $A$  de dimension  $3 \times 3$  :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Exercice 1

Écrire sous forme de tableau la matrice  $A = (a_{ij})$ , matrice carrée  
d'ordre 3 définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 2i & \text{si } i < j \\ a_{ij} = i + j & \text{si } i > j \end{cases}$$

## Définitions

- La matrice  $(a_{ij})$  telle que  $a_{ij} = 0$  pour tout couple  $(i, j)$  est appelée **matrice nulle**. On note la note  $0$ .
- Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , la matrice  $(a_{ij})$  telle que 
$$\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
 est appelée **matrice identité** et est notée  $I_n$ .

## Exemple

Pour les matrices carrées d'ordre 3, la matrice nulle est :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et la matrice identité est :  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Définition - identité des matrices

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de dimension  $n \times p$ .  
 $A = B$  si et seulement si pour tout couple  $(i, j)$  :  $a_{ij} = b_{ij}$

## Exemple

Soient  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$   
 $A = B$  si et seulement si  $a = 3$  et  $b = 0$ .

## Exercice 2

On considère les matrices  $A$  et  $B$  définies par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & a - b \\ b - 5 & 1 \end{pmatrix}$

et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4b & 1 \end{pmatrix}$ .

A quelles conditions avons-nous  $A = B$  ?

## 1 Exemple préliminaire

## 2 Définitions

## 3 Addition – Produit par un réel

## 4 Produit des matrices – Puissance d'une matrice

Préliminaire – « Le produit 1 ligne par 1 colonne »

Produit des matrices



# Addition des matrices – Produit par un réel

## Définition

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de dimension  $n \times p$ .

**L'addition des matrices** est définie par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

**Le produit externe des matrices** est défini, pour  $k \in \mathbb{R}$ , par :

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$$

# Addition des matrices – Produit par un réel

## Méthode : Comment additionner deux matrices ?

- vérifier que les deux matrices ont même taille
- additionner coefficient par coefficient, aux place identiques dans les deux matrices

## Méthode : Comment multiplier une matrice par un réel $k$ ?

- multiplier chaque coefficient de la matrice par  $k$

# Addition des matrices – Produit par un réel

Exemple  
préliminaire

Définitions

Addition –  
Produit par un  
réel

Produit des  
matrices –  
Puissance d'une  
matrice

Préliminaire –  
« Le produit 1  
ligne par 1  
colonne »  
Produit des  
matrices

## Exemples

Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  alors :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -14 \\ 6 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-2 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 32 \\ -3 & 13 & -14 \end{pmatrix}$$

# Addition des matrices – Produit par un réel

Exemple  
préliminaire

Définitions

Addition –  
Produit par un  
réel

Produit des  
matrices –  
Puissance d'une  
matrice

Préliminaire –  
« Le produit 1  
ligne par 1  
colonne »  
Produit des  
matrices

## Propriétés de la somme

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices de dimension  $n \times p$ .

- Commutativité :  $A + B = B + A$
- Associativité :  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Élément neutre est la matrice nulle  $0$  :  $A + 0 = 0 + A = A$
- Si  $A = (a_{ij})$ , alors la matrice  $(-a_{ij})$  est appelée **matrice opposée** de  $A$ , et est notée  $-A$   
Elle vérifie :  $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- $(-1) \cdot A = -A$
- $A - B = A + (-B)$

## Notation

La somme finie de  $n$  termes  $A + A + \dots + A$  est notée  $n \cdot A$ .

# Addition des matrices – Produit par un réel

## Propriétés du produit externe

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $A$  et  $B$  deux matrices de dimension  $n \times p$ .

Alors :

- $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$
- $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$
- $1 \cdot A = A$

## Exercice 3

Soient  $A$  et  $B$  les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer  $2A+3B$ .

## ① Exemple préliminaire

## ② Définitions

## ③ Addition – Produit par un réel

## ④ Produit des matrices – Puissance d'une matrice

Préliminaire – « Le produit 1 ligne par 1 colonne »  
Produit des matrices

# Préliminaire – « Le produit 1 ligne par 1 colonne »

Exemple  
préliminaire

Définitions

Addition –  
Produit par un  
réelProduit des  
matrices –  
Puissance d'une  
matricePréliminaire –  
« Le produit 1  
ligne par 1  
colonne »  
Produit des  
matrices

## Définition

On considère les matrices  $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$  et  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$ , noté  $A \times B$  ou  $AB$ , est une matrice carrée d'ordre 1 définie par :

$$AB = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

## Exemple

Si  $A = (1 \ -3 \ 5 \ 4)$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  alors

$$AB = (1 \times 2 + (-3) \times 1 + 5 \times 0 + 4 \times (-1)) = (-5)$$



# Produit des matrices

## Définition

Soient  $A = (a_{ij})$  une matrice  $n \times p$  et  $B = (b_{ij})$  une matrice  $p \times q$ .

On appelle **produit de la matrice A par la matrice B**, et l'on note  $A \times B$  ou  $AB$ , la matrice  $C = (c_{ij})$  de dimension  $n \times q$  définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

# Produit des matrices

## Méthode : Comment multiplier deux matrices entre elles ?

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices. Pour effectuer le produit  $A \times B$  :

- **vérifier que le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$**
- placer la matrice  $A$  en bas à gauche et la matrice  $B$  en haut à droite
- pour calculer le coefficient ligne  $i$  colonne  $j$  dans la matrice  $A \times B$  :
  - isoler la ligne  $i$  dans  $A$
  - isoler la colonne  $j$  dans  $B$
  - faire les produits des termes deux à deux, l'un dans la ligne de  $A$ , l'autre dans la colonne de  $B$
  - faire la somme des résultats obtenus
  - placer ce résultat à l'intersection de la ligne de  $A$  et de la colonne de  $B$
- recommencer pour tous les coefficients

## Produit des matrices

## Méthode : Comment multiplier deux matrices entre elles ?

Prenons une matrice  $A$  de dimension  $3 \times 4$  et une matrice  $B$  de dimension  $4 \times 5$ .

Premièrement nous remarquons que  $A$  a 4 colonnes et  $B$  a 4 lignes, donc le produit est possible.

Ensuite nous plaçons les matrices et calculons par exemple le coefficient ligne 2 colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_{13} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{23} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{43} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{23} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

## Exemple

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculons  $C = AB$  et  $D = BA$  :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$$

## Exercice 4

Soient A et B les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices AB et BA.

## Produit des matrices

### Autre exemple

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

$A$  est une matrice  $2 \times 2$ ,  $B$  est une matrice  $2 \times 3$  et  $C$  est une matrice  $3 \times 2$ .

Quelle est la taille de la matrice  $AB$  ?

Quelle est la taille de la matrice  $BA$  ?

Quelle est la taille de la matrice  $BC$  ?

Quelle est la taille de la matrice  $CB$  ?

Quelle est la taille de la matrice  $AC$  ?

Quelle est la taille de la matrice  $CA$  ?

# Produit des matrices

## Remarques

- On a  $AB \neq BA$  : la multiplication des matrices n'est pas commutative.
- Les matrices  $AB$  et  $BA$  peuvent avoir des tailles différentes.
- Le produit  $AB$  peut exister sans que le produit  $BA$  n'existe.
- Le produit d'une matrice  $n \times p$  par une matrice  $p \times q$  donne une matrice  $n \times q$  :  
**le nombre de colonnes de la matrice  $A$  doit être égal au nombre de lignes de la matrice  $B$ .**
- Le produit de 2 matrices carrées d'ordre  $n$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ .
- Si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  alors :  $AI_n = I_nA = A$  et en particulier  $I_n \times I_n = I_n$ .

## Exercice 5

Soient A et B les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Est-ce que les produits AB et BA existent ?

Si oui, effectuer le calcul.



# Produit des matrices

## Propriété : associativité

Soient  $A$  une matrice  $n \times p$ ,  $B$  une matrice  $p \times q$  et  $C$  une matrice  $q \times r$ . Alors :

$$(AB)C = A(BC)$$

On dit que la multiplication des matrices est associative et le produit  $A(BC)$  est noté  $ABC$ .

## Exercice 6

Soient A, B et C les matrices :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1 Quelle est la nature des matrices AB et BC ?
- 2 Déterminer de deux façons différentes le produit ABC.