Représentation des nombres en informatique : approfondissement

Laurent Debize

Exercice 1 : Écrire toutes les puissances de 2, de 2^0 à 2^{10}.
Vous constatez que $2^{10} = 1024 \approx 1000$. En informatique, 1 Kilo-octet (1 Ko) vaut 1024 octets et non pas 1000 (pour être précis, 1024 octets s'appelle un kibi-octet).
Écrire en hexadécimal : 1 Ko ; 2 Ko ; 3Ko, 4 Ko ; 40 Ko.

Exercice 2 : compléter la table de multiplication suivante en base 16 :

$\times$	A	B	C	D	E	F
A	64	6E				
B		79				
C						
D						
E						
F	96	A5				E1

Exercice 3 : Sur un ordinateur 16 bits, un entier N est représenté de la manière suivante : le premier bit à gauche donne le signe (0 correspond à + et 1 à -), et lorsque l'entier est positif, les 15 suivants sont les chiffres de l'écriture binaire de N. Par exemple :
0000000000011101 représente $+(11101)_2$, c'est-à-dire +29.

1. Que devrait logiquement représenter le nombre **1**000000000011101 ?
2. A quoi devrait être égal **0**000000000011101 + **1**000000000011101 ? Est-ce le cas ?

   A cause du problème précédent on opère différemment pour coder les entiers négatifs : le premier bit représente bien - s'il est égal à 1. Cependant, la somme d'un nombre N et de son opposé $-N$ devra toujours être nulle. Pour cela on adopte la méthode dite des **compléments**.
   Par exemple, pour -29, on part de la représentation de 29, c'est-à-dire **0**000000000011101 et on détermine les 16 bits **X**XXXXXXXXXXXXXXX tels que :
   0000000000011101 + **X**XXXXXXXXXXXXXXX = **0**000000000000000
   La méthode des compléments se fait en deux étapes :
   – Changer les 0 par des 1 et les 1 par des 0 (c'est le complément à 1)
   – Ajouter 1 au nombre trouvé à l'étape précédente (c'est le complément à 2)

3. Donner la représentation de -29 par cette méthode
4. Calculer $29 + (-29)$ en posant l'addition en base 2
5. De combien de bits est composé le résultat ? Que va t-il se passer ?

Exercice 4 : On crée un jeu simple sur un ordinateur : une bille est installée au « départ » de la grille suivante (figure 1 à gauche), on doit la faire parvenir à « l'arrivée » en utilisant uniquement des déplacements vers la droite et vers le bas.
Pour programmer ce jeu, on associe à chaque parcours un nombre entier de la manière suivante :

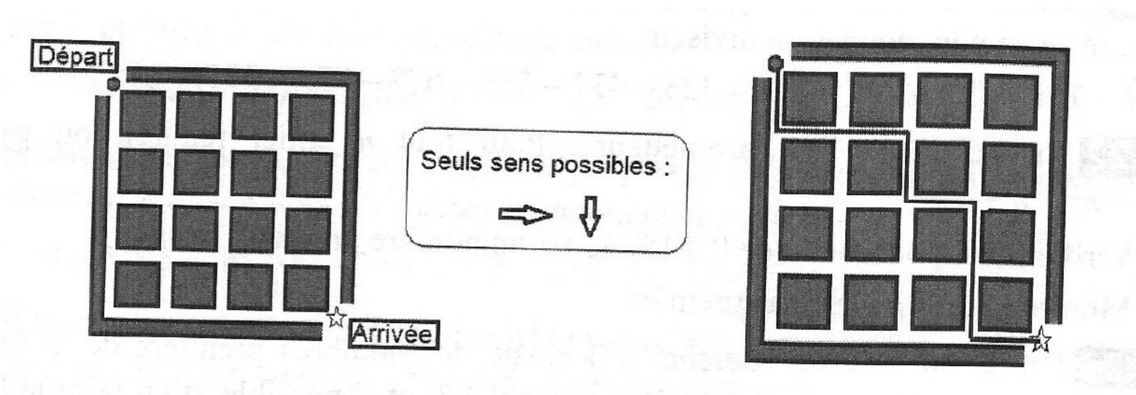

Figure 1 – Le jeu de la bille

– On note 0 chaque déplacement vers le bas et 1 chaque déplacement vers la droite.
– On obtient alors un nombre de 8 chiffres écrit en base 2.
– On écrit ensuite ce nombre en base 10.

Par exemple, pour le parcours de la figure 1 (à droite), on obtient le nombre entier 105. En effet, on se déplace d'abord vers le bas (0), puis deux fois vers la droite (011), puis une fois vers le bas (0110), puis une fois vers la droite (01101), puis deux fois vers le bas (0110100), et enfin une fois vers la droite (01101001). Le nombre obtenu, écrit en base 2, est $(01101001)_2$. Il est égal à 105.

1. On considère le parcours de la figure 2.
   a) Donner le nombre en base 2 associé à ce parcours.
   b) Donner l'écriture en base 10 de ce nombre

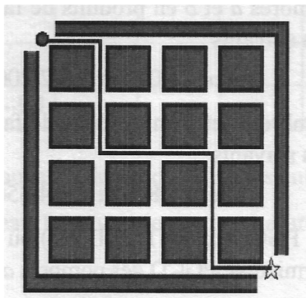

Figure 2 – Un parcours

2. a) Écrire en base 2 le nombre 85.
   b) Représenter à main levée le parcours associé au nombre 85.
3. On considère un parcours sur cette grille, et on note N le nombre entier associé, écrit en base 10.
   a) Est-il possible d'avoir $N = 31$? (Justifier)
   b) Quelle est la plus petite valeur possible de N ?
   c) Quelle est la plus grande valeur possible de N ?

Technique de conversion des nombres réels

Un nombre réel s'écrit à l'aide de chiffres après la virgule. Prenons par exemple 0,275. On peut le décomposer de la façon suivante :
$0,275 = 0,275 = 2 \times 0,1 + 7 \times 0,01 + 5 \times 0,001$

Autrement dit, en utilisant les puissances de 10 :
$0,275 = 2 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$
Rappel : $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0,01$

Le principe sera le même en base 2 mais avec des puissances de 2.

Conversion binaire → décimal

Exemple : Soit $X = (0,1101)_2$ écrit en base 2

Chiffres	0,	1	1	0	1
poids	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}

Partie entière de X : $0 \times 2^0 = 0$
Partie fractionnaire de X :
$1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = 0,8125$
Donc $X = (0,8125)_{10}$

Conversion décimal → binaire

Exemple : Prenons $N = (0,375)_{10}$ et convertissons-le en base 2
Notons l'écriture en base de N de la façon suivante :

$$N = (0, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots a_{-n})_2$$

Les chiffres $a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots a_{-n}$ sont tous égaux à 0 ou 1. Ce sont les chiffres qui composent l'écriture en base 2 de la partie fractionnaire de N.
On peut donc écrire :

$$N = (0,375)_{10} = \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_{-2}}{2^2} + \frac{a_{-3}}{2^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{2^n}$$
$$\downarrow \times 2$$
$$2 \times (0,375)_{10} = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{2} + \frac{a_{-3}}{2^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{2^{n-1}}$$

a_{-1} **est donc la partie entière de** $(0,375)_{10} \times 2$ Pour obtenir le chiffre suivant, on calcule :

$$2 \times (0,375)_{10} - a_{-1} = \frac{a_{-2}}{2} + \frac{a_{-3}}{2^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{2^{n-1}}$$
$$\downarrow \times 2$$
$$2 \times (2 \times (0,375)_{10} - a_{-1}) = a_{-2} + \frac{a_{-3}}{2} + \dots + \frac{a_{-n}}{2^{n-2}}$$

a_{-2} **est la partie entière de ce nombre**
Et ainsi de suite : on s'arrête quand on obtient 0 où que l'on a atteint la précision souhaitée.

Règle pratique
– On multiplie N par 2.
– La partie entière du résultat donne le premier chiffre de l'écriture en base 2.
– On soustrait à $2N$ ce premier chiffre et on multiplie par 2.
– La partie entière du résultat fournit le second chiffre de l'écriture binaire.
– On recommence jusqu'à obtenir 0 ou la précision souhaitée.

Exemple :
$0,375 \times 2 = \mathbf{0},750 \Rightarrow a_{-1} = 0$
$0,750 - \mathbf{0} = 0,750$

$0,750 \times 2 = \mathbf{1},500 \Rightarrow a_{-2} = 1$

$1,500 - \mathbf{1} = 0,500$
$0,500 \times 2 = \mathbf{1},000 \Rightarrow a_{-3} = 1$

$1,000 - \mathbf{1} = 0$ **STOP !**
D'où : $(0,375)_{10} = (0,011)_2$

Si l'on ne trouve pas 0, on s'arrêtera lorsque l'on aura la précision souhaitée. Si un nombre contient une partie entière et une partie fractionnaire, il faudra convertir chaque partie à l'aide de la technique correspondante, et ajouter le tout.
Si on veut convertir en hexadécimal ou à partir de l'hexadécimal, la technique est identique, en remplaçant tous les 2 par 16.

Exercice 5 : compléter les tableaux suivants (donner au plus 6 chiffres significatifs) :

Écriture décimale	Écriture binaire	Écriture hexadécimale
0,4375		
0,76		
121,25		
	0,11	
	0,01101	
	111,101	
		0,A
		0,24B
		0,24B
		35C,38A

Exercice 6 : Votre ordinateur est-il précis ?
Nous voulons étudier le comportement de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,1 \\ u_{n+1} = 11 \times u_n - 1 \end{cases}$$

1. Calculer **à la main** u_1.
2. A votre avis, comment pourrait-on exprimer le terme général u_n pour tout entier naturel n ?
3. Ouvrez votre tableur préféré !
4. Dans une case, entrez 0,1.
5. Dans la case en dessous, entrez la formule pour calculer u_1
6. Étendez la formule sur une vingtaine de cases.
7. Que se passe-t-il ?
8. Pour comprendre le phénomène, convertissez 0,1 en base 2.

Exercice 7 :

1. Représenter sur un segment $[0;1[$ tous les nombres binaires de la forme $(0,abc)_2$ (a, b, c valant 0 ou 1).
2. Quel est l'écart entre deux nombres consécutifs ?
3. Donner une approximation binaire sur 4 bits de $0,1; 0,2; 0,3; \ldots; 0,9$.